PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Volumen 1

Gerard Romo Garrido



Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates Cool·lección** son recopilaciones de materiales matemáticos, redactados, ordenados y sistematizados por **Gerard Romo**, con el objetivo de que puedan ser útiles para cualquier estudioso de las matemáticas.

"**Always Under Construction**": Debido a lo ambicioso del proyecto, estos documentos se van ampliando, corrigiendo y completando a lo largo de los años.

Se agradecerá cualquier observación, comentario, rectificación o colaboración a

toomates@gmail.com

Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición.

Actualmente Toomates Cool·lección consta de los siguientes documentos:

Geometría axiomática:

Geometría Axiomática	pdf	doc1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
Problemas de Geometría (Vol. 1)	pdf	doc
Problemas de Geometría (Vol. 2)	pdf	doc

Matemáticas para el bachillerato (en catalán):

Àlgebra Lineal Batxillerat	pdf	doc
Geometria Lineal Batxillerat	pdf	doc
Càlcul Infinitesimal Batxillerat	pdf	doc
Programació Lineal Batxillerat	pdf	doc

Problemarios:

Problemas de Matemáticas (Vol. 1)	pdf	doc
Cangur Integral (en catalán)	pdf	doc
Geometría Proyectiva Práctica	pdf	doc

Versión de este documento: 12/01/2018

www.toomates.net

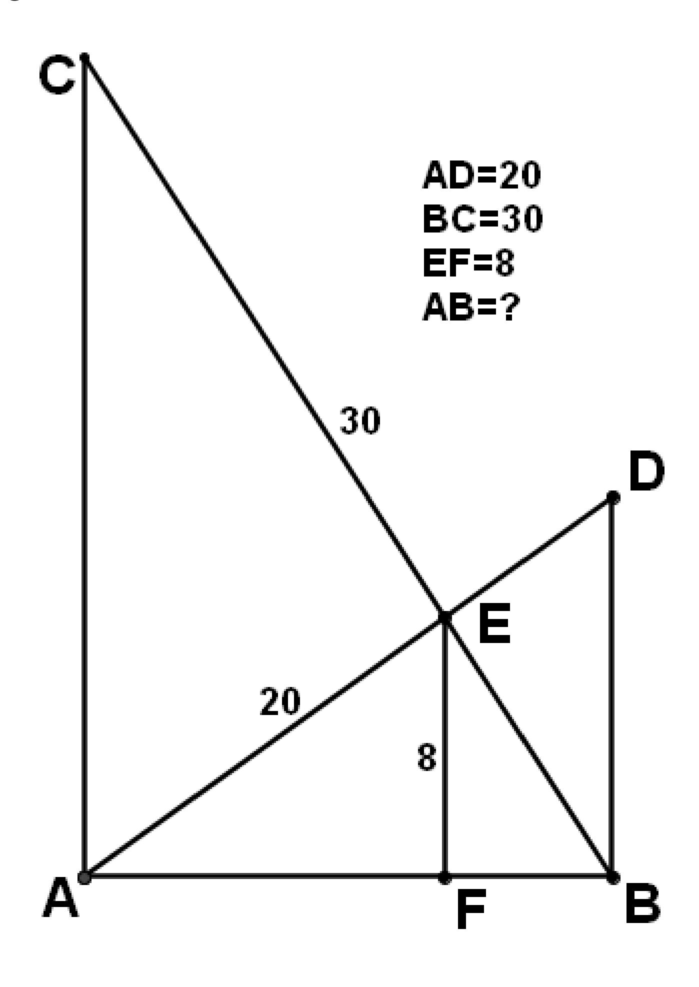
Índice.

40. Longitud con circunferencia inscrita en triángulo.
41. Longitud de segmento en un triángulo.
42. Parábola inscrita en un triángulo rectángulo.
43. Radio de una circunferencia dada una tangente, secante y segmento.
44. Tangente y secante a una circunferencia.
45. Punto medio en tangente de dos circunferencias.
46. Área de un cuadrilátero.
47. Superficie con círculos tangentes.
48. Puntos fijos en un paralelogramo.
49. Volumen máximo de caja triangular.
50. Determinación del valor de una función continua. (*)
51. Área con tres circunferencias tangentes.
52. Razón áurea en una semicircunferencia. (*)
53. Simplificación de raíces encadenadas.
54. Ángulo con dos rectas paralelas en un cuadrado. (*)
55. Ecuación con valor absoluto.
56. Área de un doble eclipse.
57. Área independiente de la traslación de un cuadrilátero.
58. Números de tres cifras que suman 11.
59. Área de una pieza de un cuadrilátero.
60. Serie de fracciones.
61. Triángulo rectángulo interior en un círculo.
62. Múltiplo con todos los dígitos.
63. Ángulo interior en un triángulo isósceles. (*)
64. Potencia quinta de un polinomio. (*)
65. Suma de cubos.
66. Triángulo con bisectriz y ángulo recto.
67. Ángulos de un triángulo con bisectriz.
68. Problema de probabilidad con ecuación de segundo grado.
69. Mínimo en la suma de longitudes de dos lados de un triángulo.
70. Triángulo con ángulo de 60 grados.
71. Triángulo rectángulo y dos puntos de la hipotenusa.
72. Área de un cuadrado interior.
73. Determinación del ángulo en un cuadrilátero.
74. Ecuación con producto de polinomios de segundo grado.
75. Producto de segmentos en triángulo con punto interior.
76. Seno del ángulo de un cuadrilátero con ángulos rectos.
77. Suma de los diámetros inscrito y circunscrito en función de los catetos.

(*) Problemas considerados difíciles.

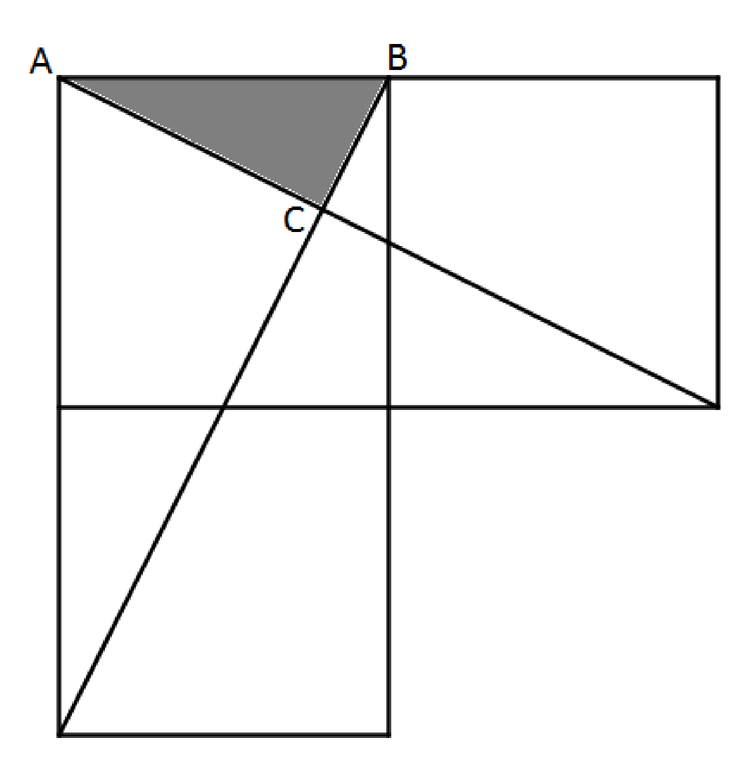
1. El problema de las escaleras cruzadas.

Determina la longitud AB



2. Cálculo del área de un triángulo.

Hemos construido la siguiente figura con cuadrados de lado 1. Calcula el área del triángulo ABC.



Fuente: https://plus.google.com/101998702036074282423/posts/ERmPez3J6LP

3. Equación polinómica.

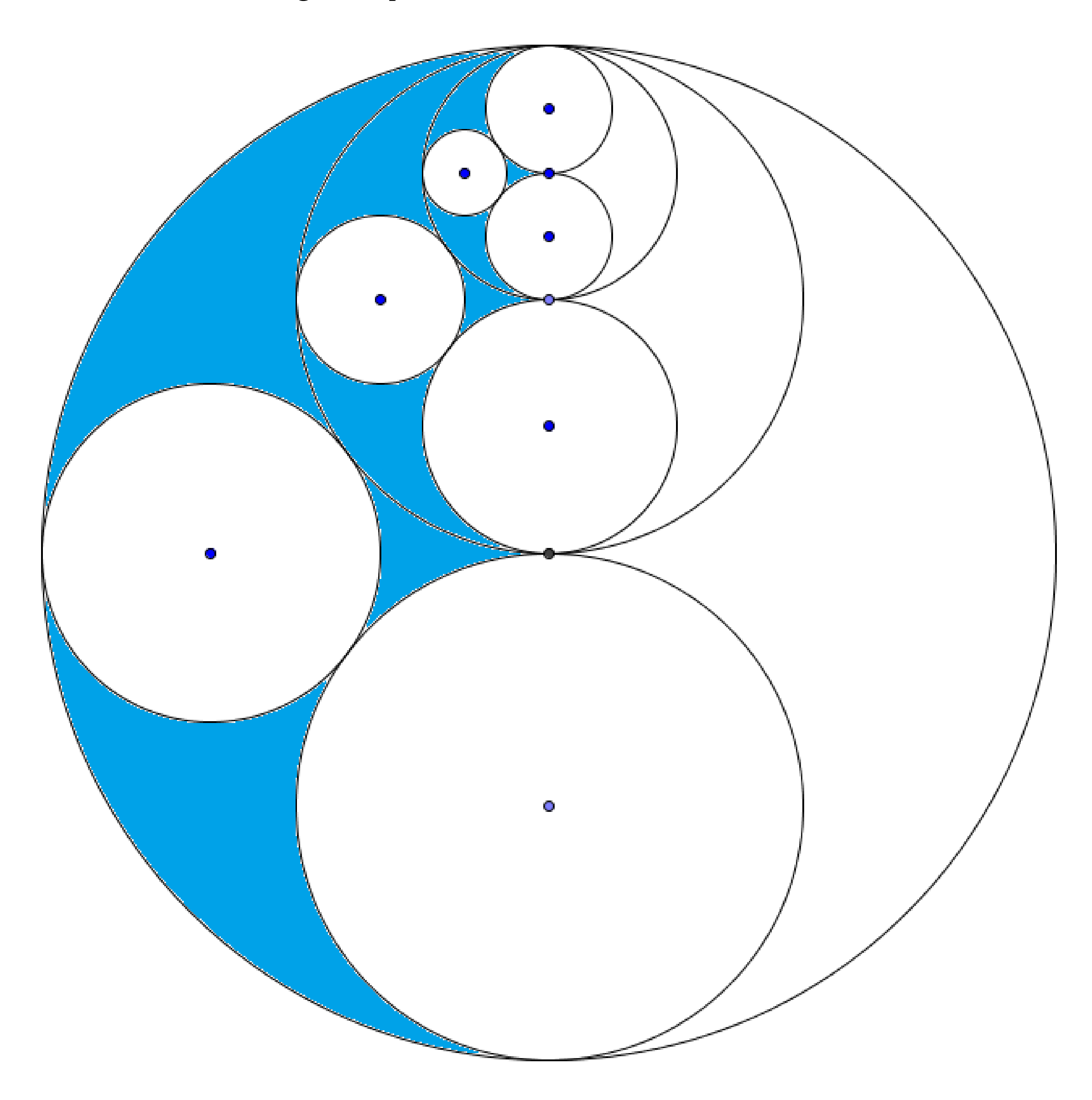
Resuelve la siguiente ecuación:

$f(x) = g(x)$ donde $f(x) = 2x^2 + 6x + 4$ y $g(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$

Fuente : http://www.matematyczny-swiat.pl/2013/05/rownosc-wartosci-dwoch-funkcji.html

4. Área de circunferencias tangentes inscritas.

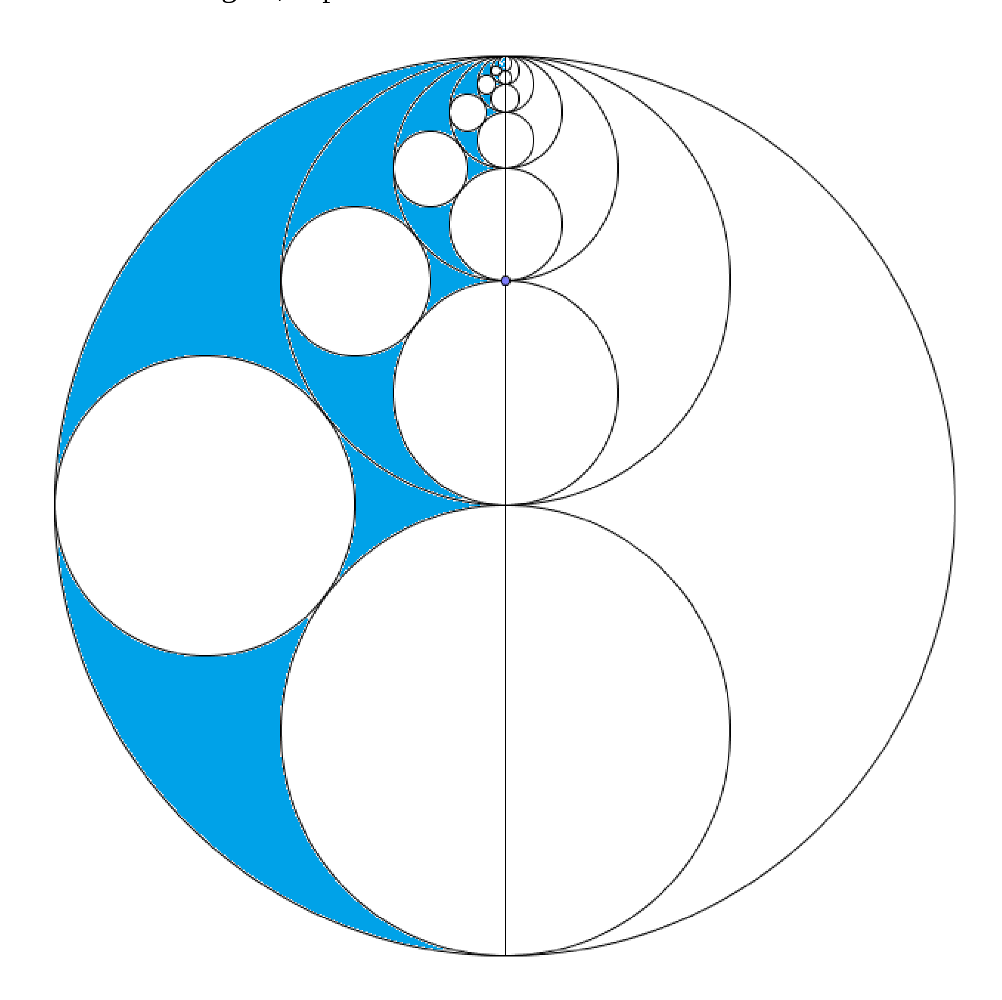
Calcula el área de la figura, suponiendo R el radio de la circunferencia exterior.



Fuente:

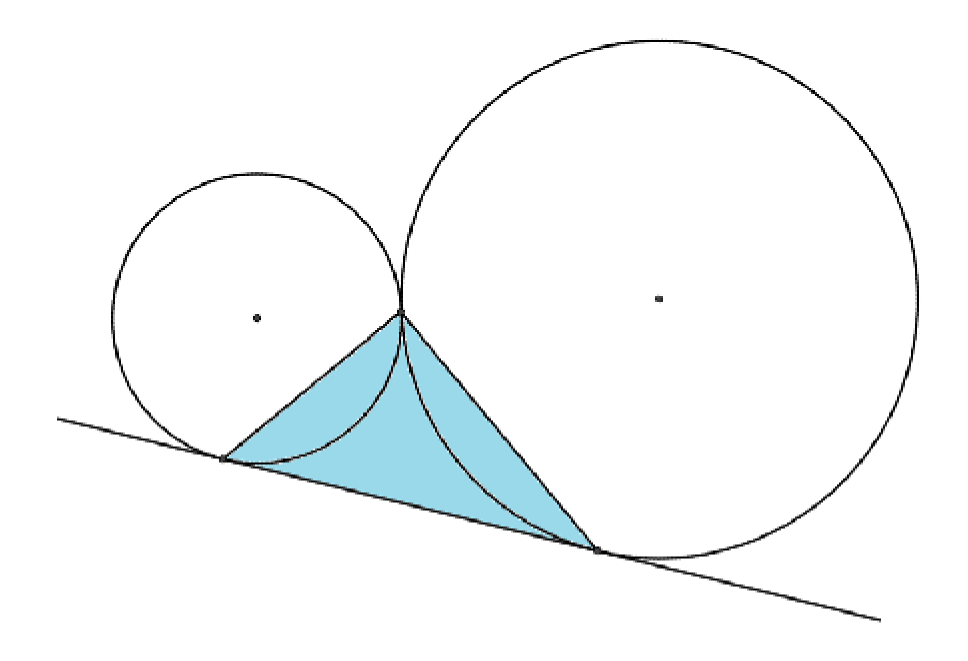
5. Área de infinitas circunferencias tangentes encajadas.

Calcula el área de la figura, suponiendo R el radio de la circunferencia exterior.



6. Área del triángulo determinado por circunferencias tangentes.

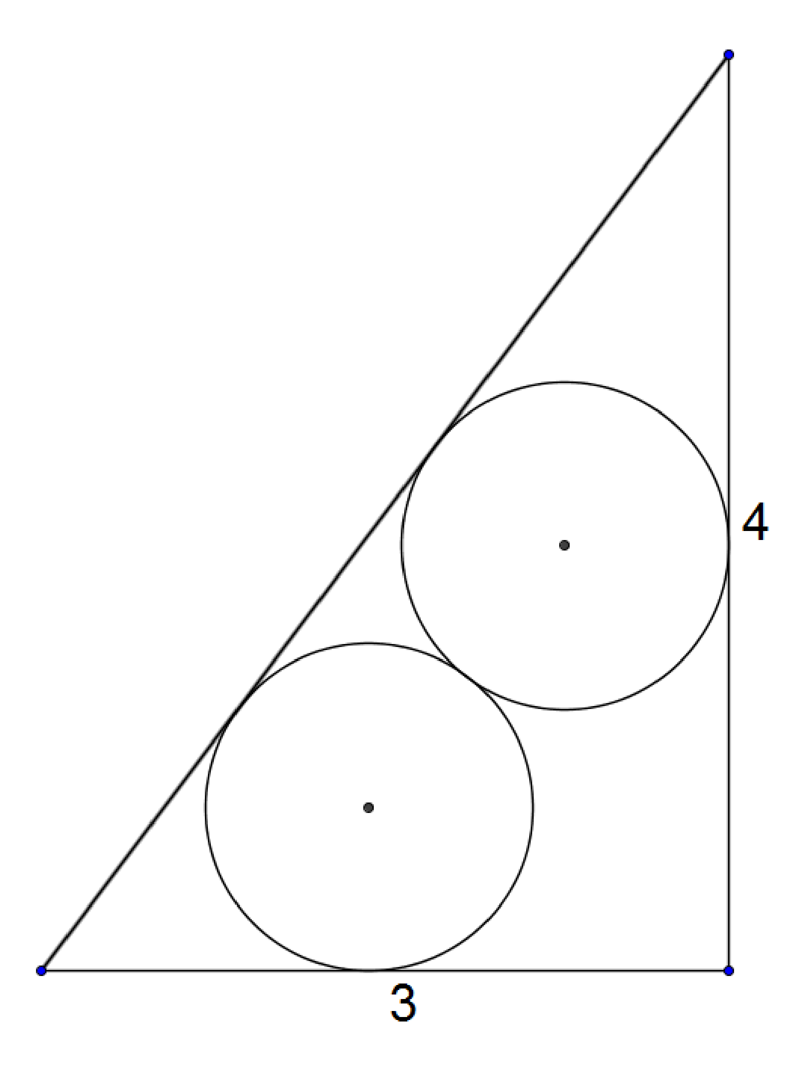
Calcula el área del triángulo determinado por dos circunferencias tangentes y la recta tangente a ambas. Suponemos r el radio de la circunferencia menor y R el radio de la circunferencia mayor.



Fuente:
https://plus.google.com/photos/+JeanDAVID/albums/5969836320841169073/5969836326162153266?pid=5969836326162153266&oid=117684142435389193789

7. Dos circunferencias inscritas en un triángulo rectángulo.

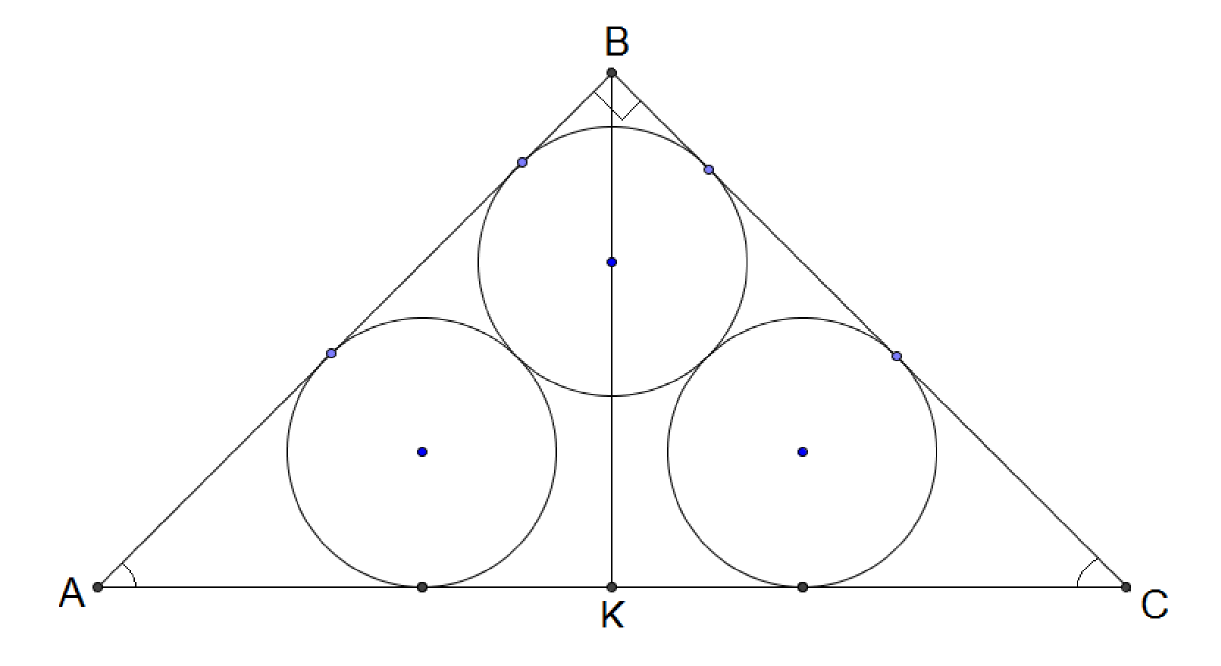
Dos circunferencias iguales están inscritas en un triángulo rectángulo de lados 4 y 3. Calcula el radio R de las circunferencias.



Fuente: https://plus.google.com/101998702036074282423/posts/Gs1V9XZbyDF

8. Tres circunferencias inscritas en un triángulo rectángulo.

En la figura tres circunferencias de radio 1 están inscritas en un triángulo de forma que el ángulo en B es de 90º y los ángulos en A y C son de 45º. Calcula la distancia AB y BK.



Font: https://plus.google.com/118246750234818303393/posts/598uFo7eudA

9. Determinación de un producto de raíces..

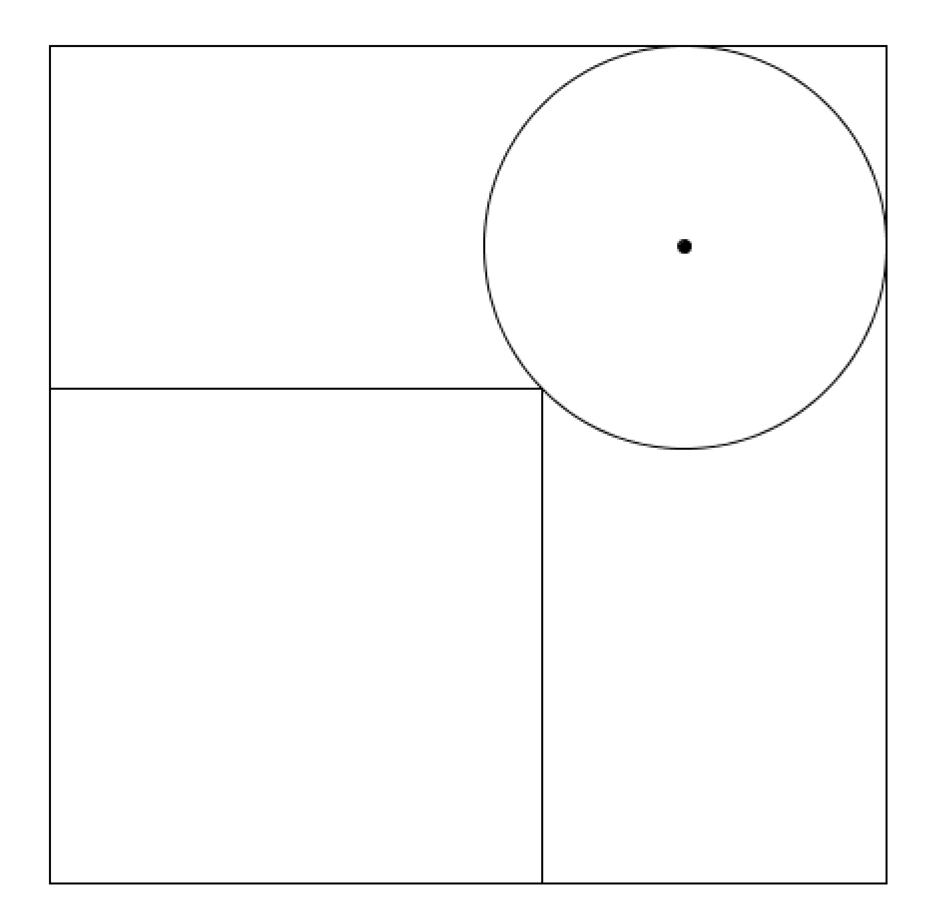
Calcula el siguiente producto de raíces sin utilizar la calculadora:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=A$$

Fuente: http://www.matematyczny-swiat.pl/2014/10/wyrazenie-pierwiastkowe.html

10. Radio de una circunferencia inscrita.

Un cuadrado de lado 1 contiene un cuadrado de lado x, $x < 1$, y una circunferencia que pasa por dos lados y el vértice de este cuadrado. Determina el radio R de la circunferencia en función de x.

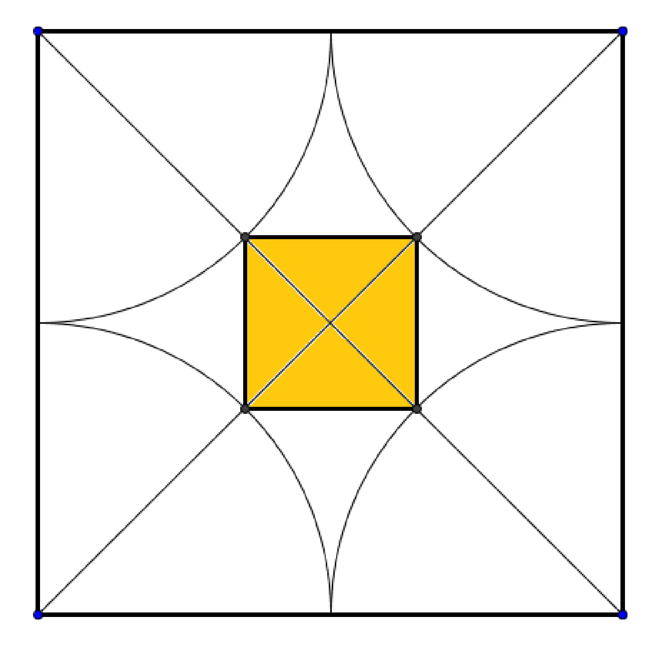


Fuente: http://foro.elnumerodeoro.cl/viewtopic.php?f=89&t=350

11. Relación entre áreas de cuadrados.

Sea a el lado del cuadrado grande y b el lado del cuadrado interior amarillo. Calcula la relación entre las áreas

$$\frac{b^2}{a^2}$$



Fuente: http://mozgalice-glavolomke.moja-vizit-karta.com/arhiva/10823

12. Sistema de ecuaciones de segundo grado.

Resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + xy = 28 \\ y^2 + xy = 21 \end{array}\right\}$$

Fuente: http://www.matematyczny-swiat.pl/2014/02/ukad-rownan_25.html

13. Ecuación con función f(f(x))=x.

La función

$$f(x) = \frac{c\,x}{2x+3}$$

satisface $f(f(x)) = x$ para todo $x \neq \frac{-3}{2}$. Determina el valor de c.

Fuente:

14. Ecuación con raíces cuadradas.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

Fuente: http://www.matematyczny-swiat.pl/2014/10/rownanie-pierwiastkowe.html

15. Suma de radicales.

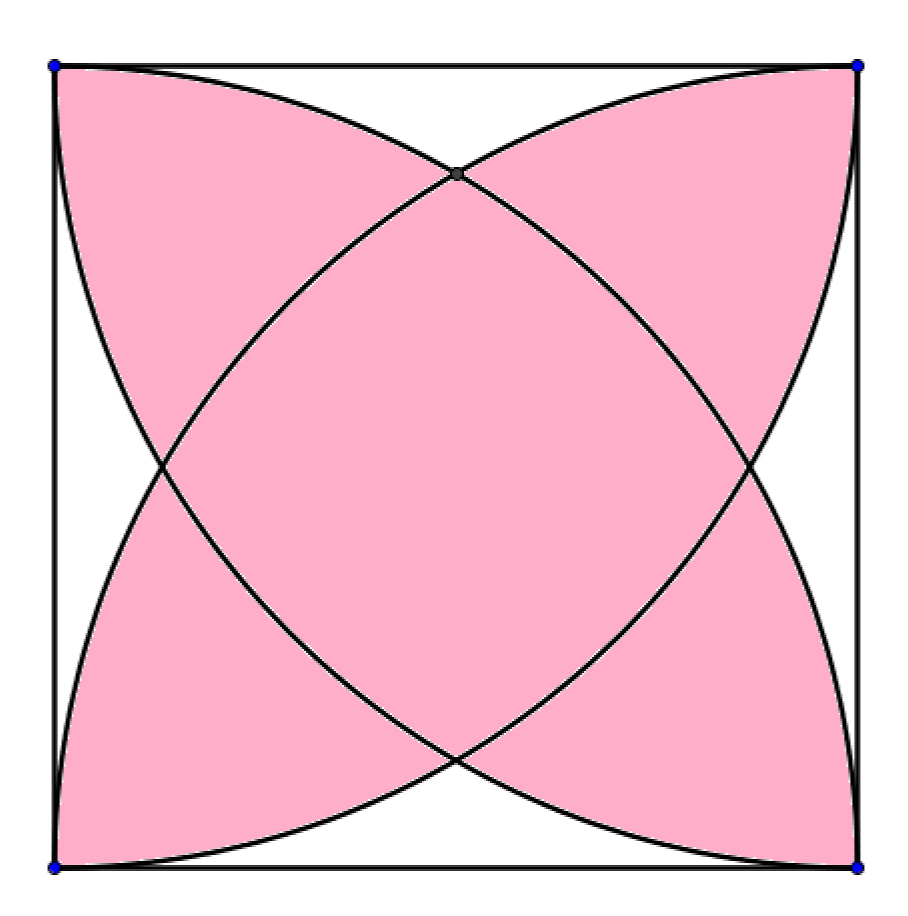
Determina cuantos sumandos tiene la siguiente operación para dar 1000 como resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...=1000$$

Fuente: http://joselorlop.blogspot.com.es/2014/05/195-hay-que-llegar-mil.html

16. Área de una estrella con circunferencias inscritas.

Determina el área de la siguiente figura, suponiendo un cuadrado de lado 1.



17. Ecuación cúbica.

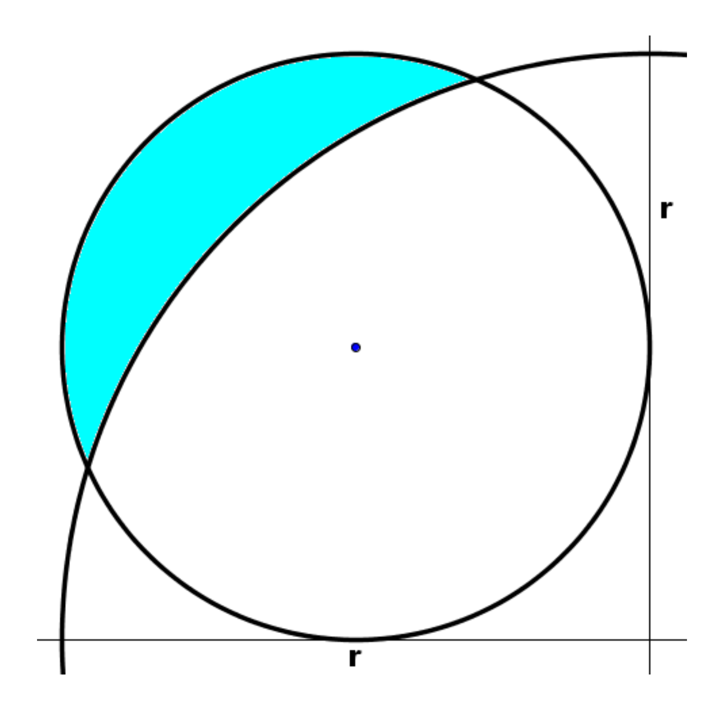
Resuelve la siguiente ecuación:

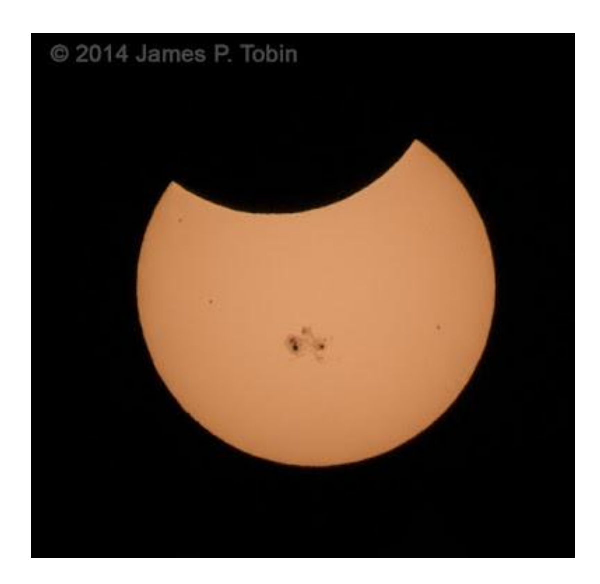
$$\sqrt[3]{1729-x}+\sqrt[3]{x}=19$$

Fuente: http://joselorlop.blogspot.com.es/2014/10/237-la-ecuacion-intrusa.html

18. Área de un eclipse.

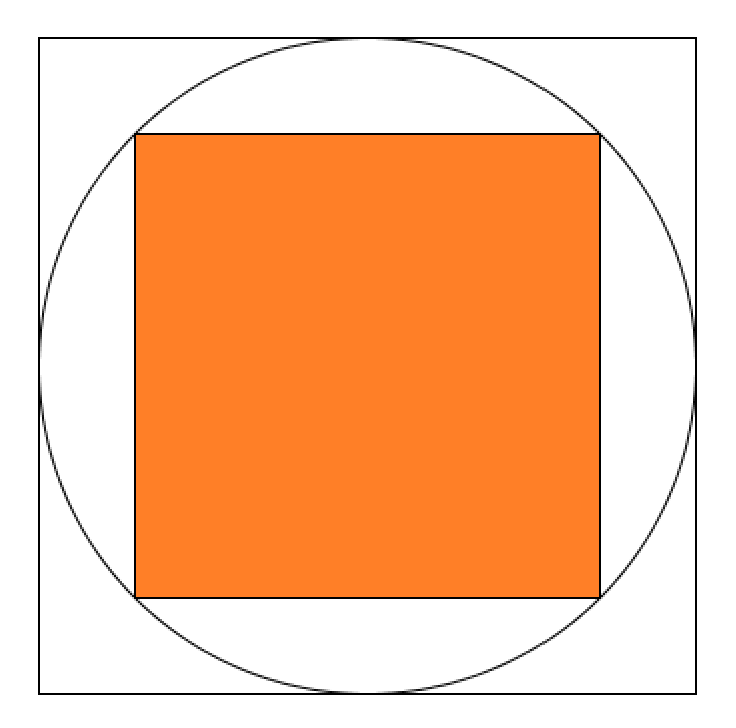
Calcula el siguiente área en función de r:





19. Área de un cuadrado inscrito.

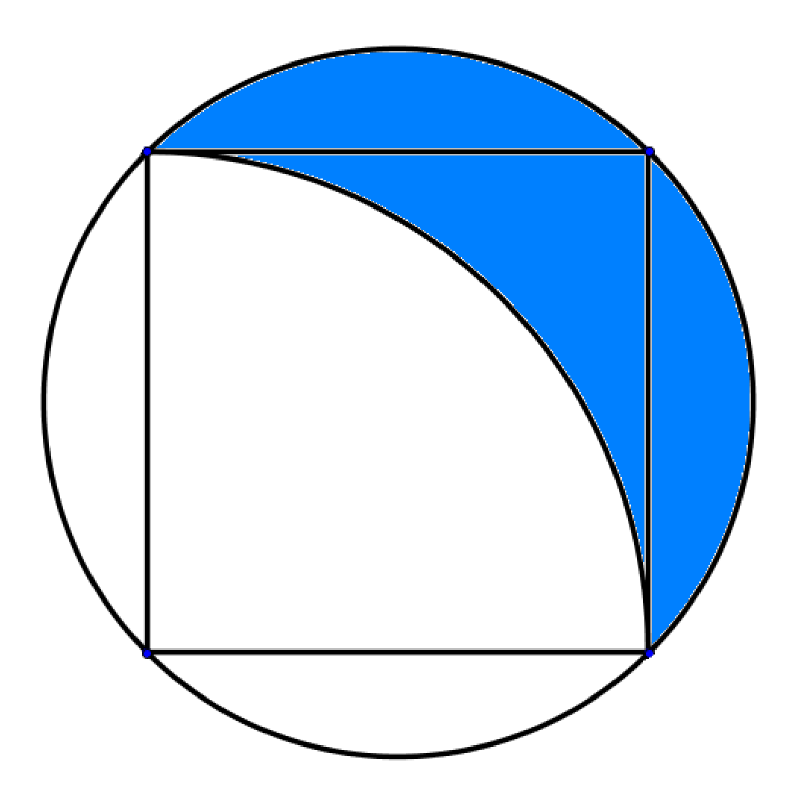
Calcula el área del cuadrado interior si sabemos que el cuadrado exterior tiene lados de longitud 1.



Fuente:

20. Área de una zona circular.

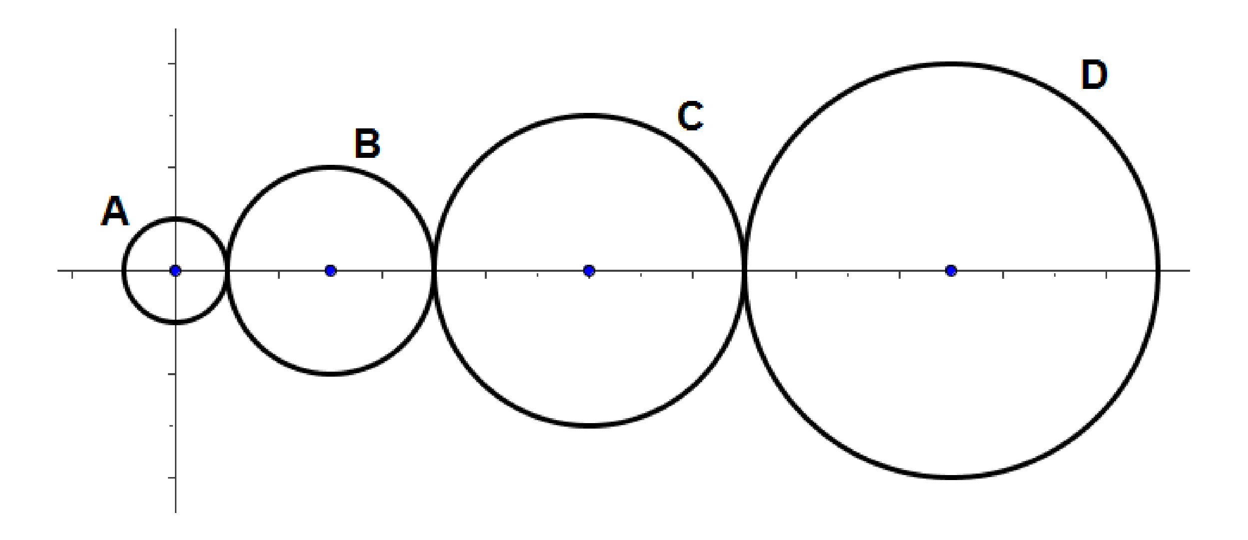
Calcula el área sombreada, suponiendo un cuadrado de lado 1.



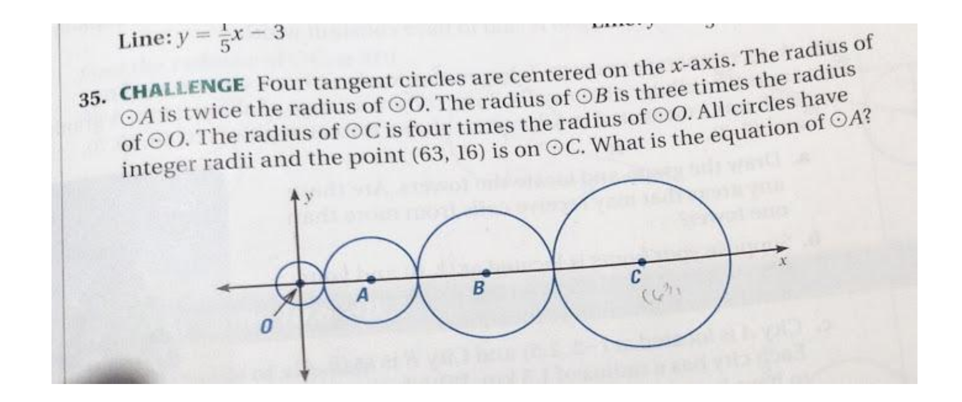
Fuente: http://functionspace.org/question/472/Area-of-the-inner-square (Math2Me)

21. Radio de circunferencias tangentes.

Tenemos cuatro circunferencias tangentes sobre el eje X. El radio de B es el doble que el radio de A. El radio de C es el triple que el radio de A y el radio de D es cuatro veces el radio de A. Todas las circunferencias tienen radios enteros y el punto (63,16) pertenece a D. ¿Cuál es la ecuación de B?



Fuente: https://plus.google.com/115929695407933609149/posts/XUwV38dUH8r

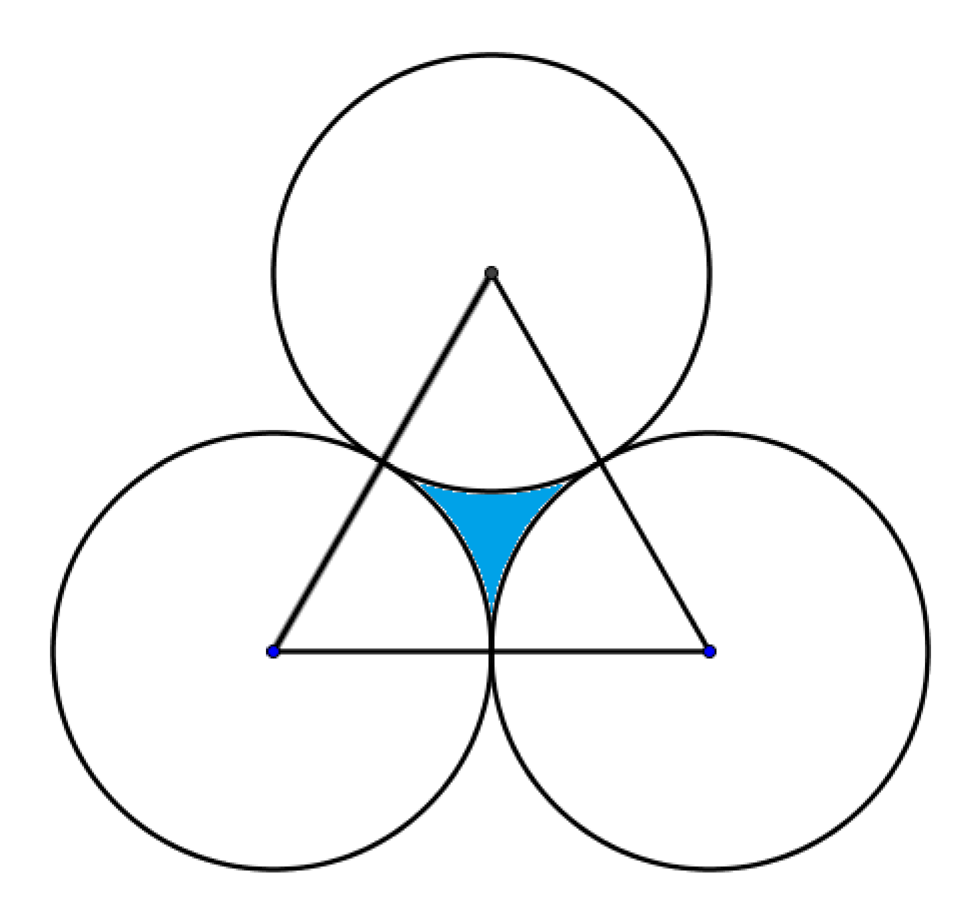


Line: $y = \frac{1}{5}x - 3$

35. CHALLENGE Four tangent circles are centered on the x-axis. The radius of $\odot A$ is twice the radius of $\odot O$. The radius of $\odot B$ is three times the radius of $\odot O$. The radius of $\odot C$ is four times the radius of $\odot O$. All circles have integer radii and the point (63, 16) is on $\odot C$. What is the equation of $\odot A$?

22. Área zona central tres circunferencias tangentes.

Calcula el área de la zona azul central, en función del radio r de las circunferencias.



Fuente: http://www.matematyczny-swiat.pl/2013/12/pole-obszaru-def.html

23. Polinomio con raíces enteras y suma de coeficientes impar.

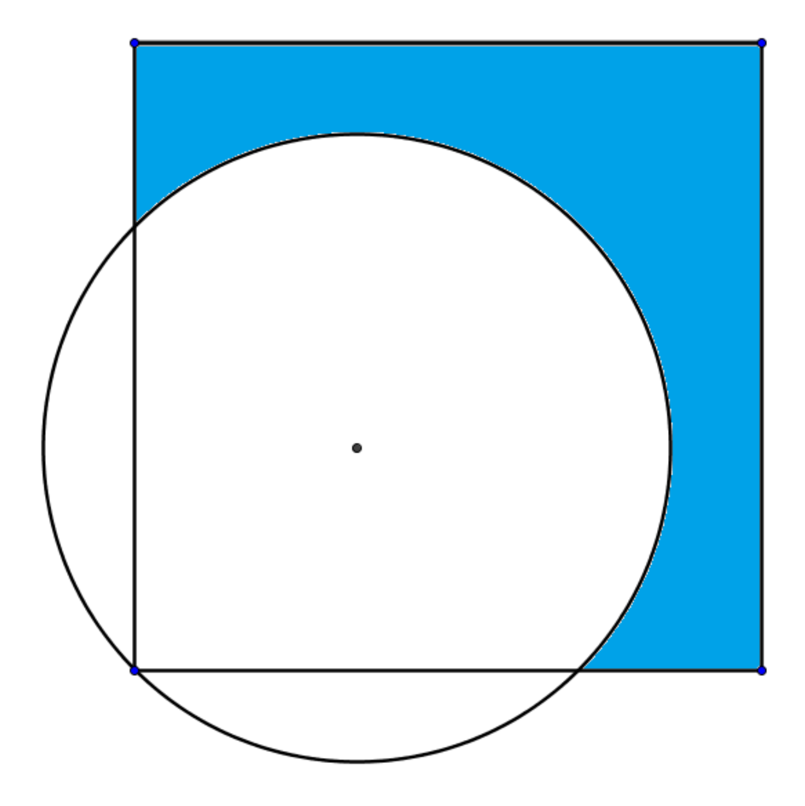
Sea f(x) un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que, si el término constante es impar, y la suma de todos los coeficientes es impar, entonces f(x) no tiene raíces enteras.

Font: Josep Font (http://nomolestesmiscirculos.hol.es/)

http://nomolestesmiscirculos.hol.es/?p=3488

24. Área entre cuadrado y circunferencia.

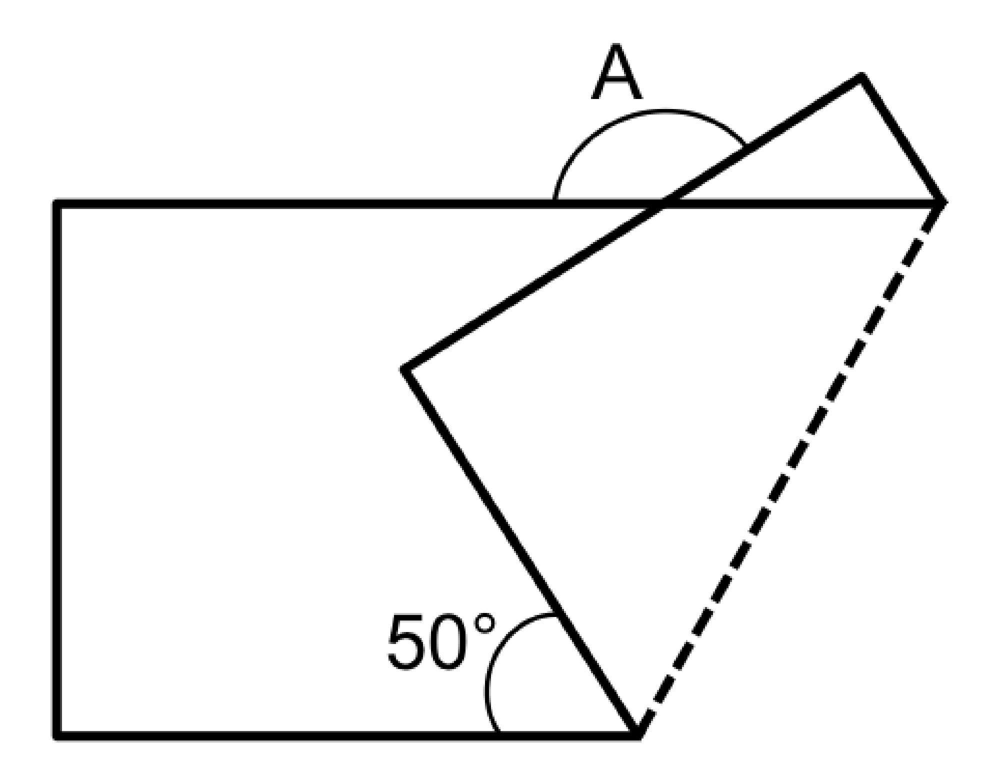
Calcula el área azul, si el cuadrado tiene lado 2 y la circunferencia tiene radio 1.



Font: https://plus.google.com/101381502910275506849/posts/KiHaJjWMEmo

25. Ángulo de un papel doblado.

Calcula el ángulo A:



Fuente: Google+

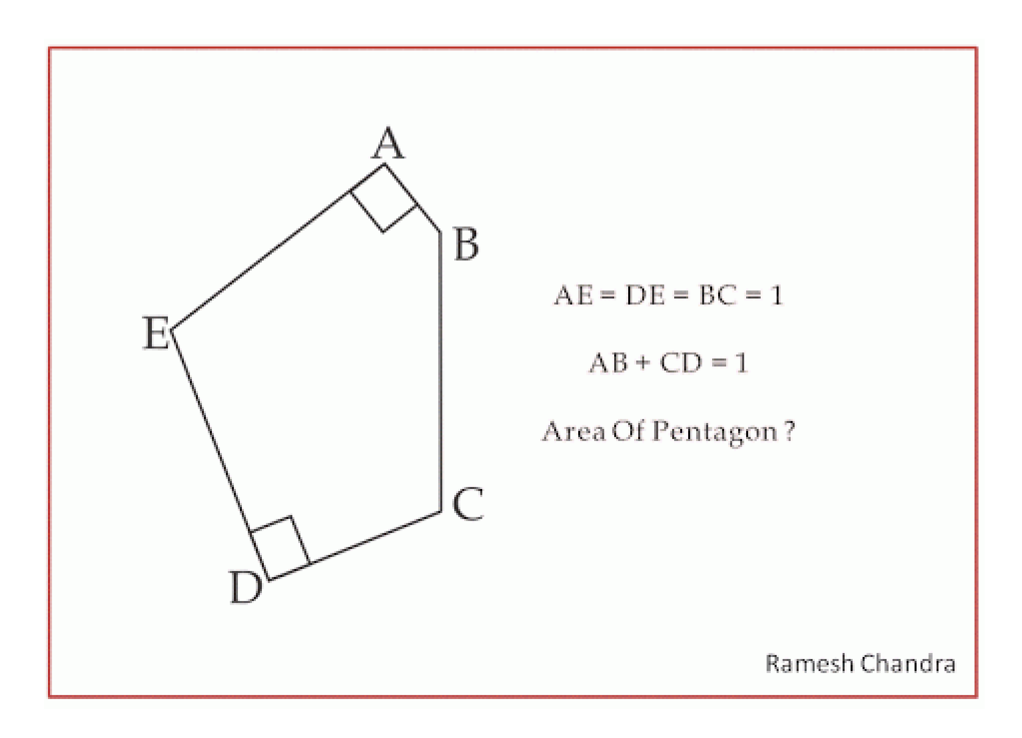
26. Suma de senos.

Calcula $A = \sin^2(1º) + \sin^2(2º) + ... + \sin^2(359º) + \sin^2(360º)$

Fuente: No molestes mis círculos (Josep Font)
Problema de la semana 2
http://nomolestesmiscirculos.hol.es/?p=3547

27. Área de un pentágono.

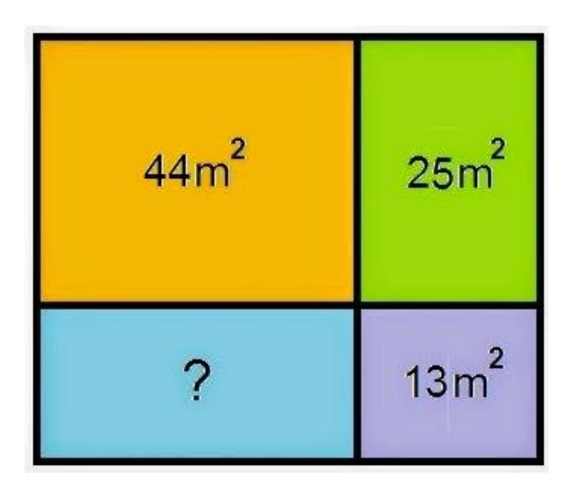
Calcula el área del siguiente pentágono:



Fuente: https://plus.google.com/101381502910275506849/posts/dPeAgBD8cNn

28. Área del cuarto rectángulo.

Calcula el área del rectángulo azul:



Fuente: Chapuzas matemáticas 271: El cuarto rectángulo (José Lorenzo López)

http://joselorlop.blogspot.com.es/2014/11/271-el-cuarto-rectangulo.html

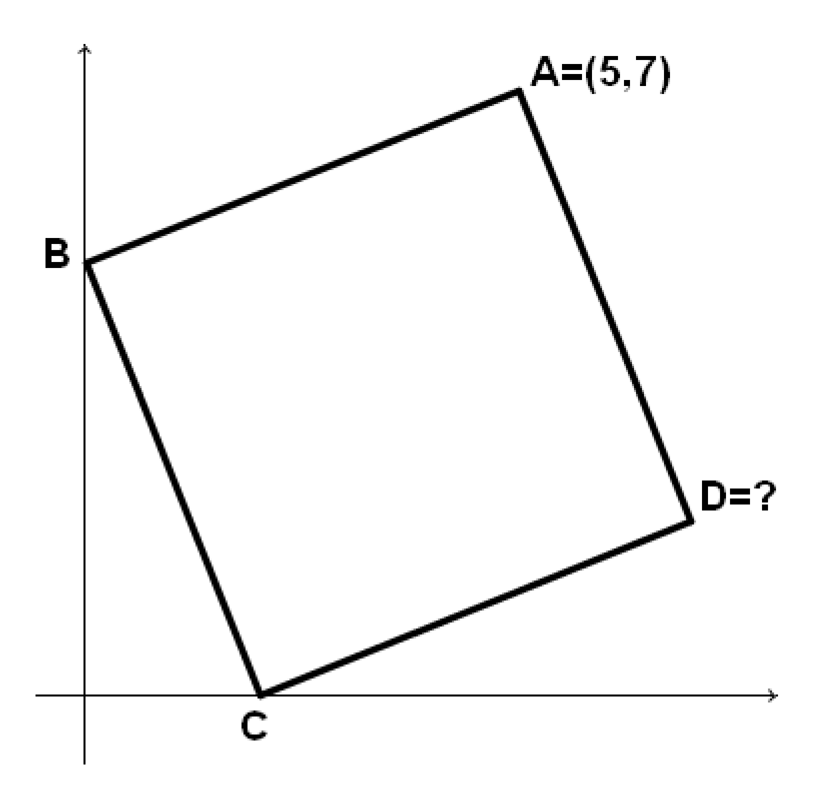
29. Problema con función.

Sea f una función de números tal que $f(2)=3$ y $f(a+b)=f(a)+f(b)+ab$ para toda a y b.
Determinar $f(11)$.

Fuente: https://plus.google.com/104354942266857447959/posts/HGkm5gYqdb8

30. Coordenadas de un cuadrado.

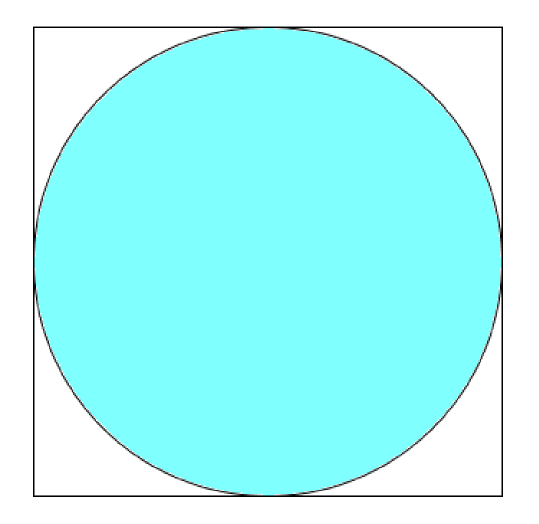
Sea ABCD un cuadrado en el que A=(5,7). Determina las coordenadas del punto D.

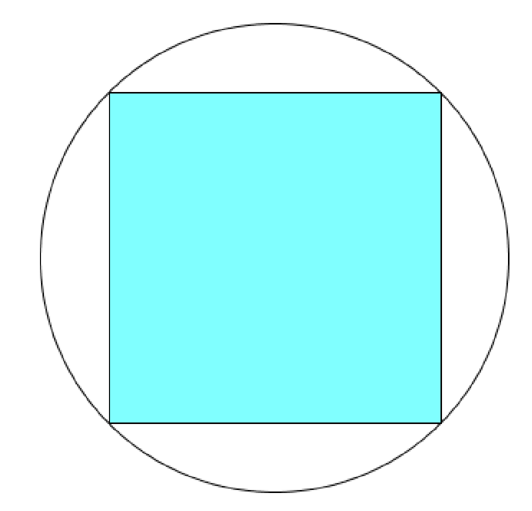


Fuente: https://plus.google.com/101998702036074282423/posts/cso9sKvFhk8

31. Clavija y hueco.

¿ Se ajusta mejor una clavija cuadrada en un hueco redondo o una clavija redonda en un hueco cuadrado?

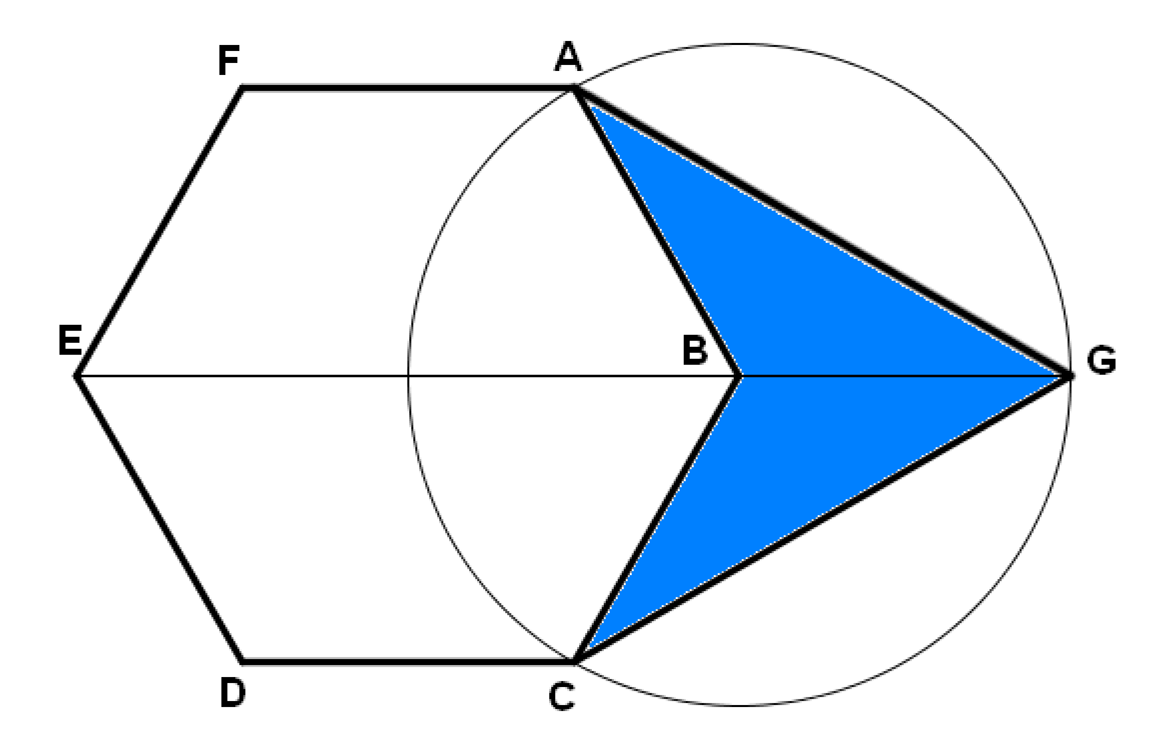




Fuente: No molestes mis circulos http://nomolestesmiscirculos.hol.es/?p=3606

32. Área con hexágonos.

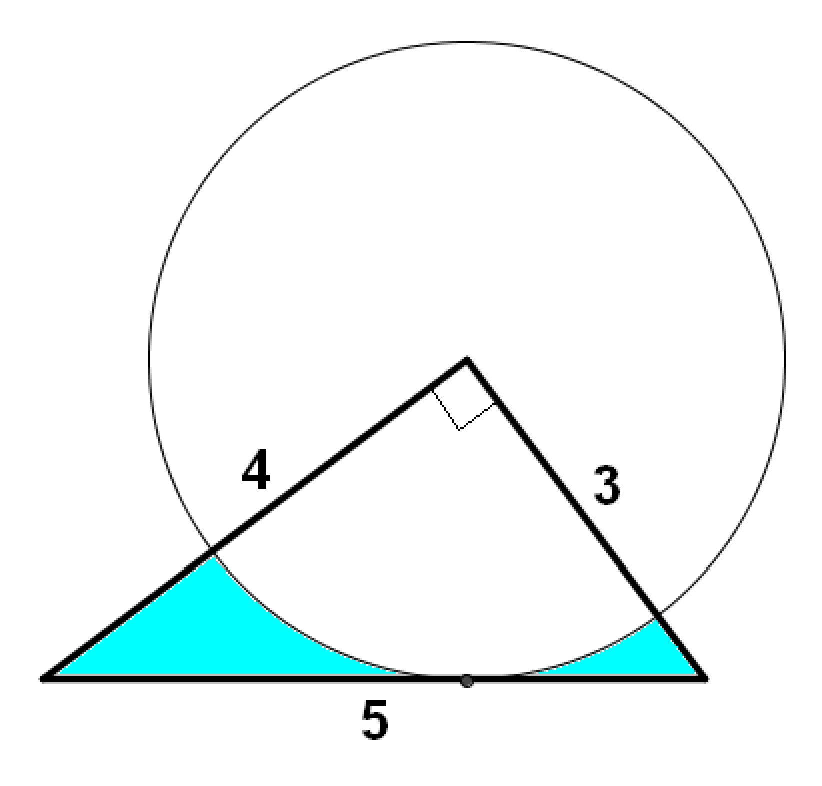
En la figura, ABCDEF es un hexágono regular. Determina la razón del área sombreada entre el área del hexágono.



Fuente: Math2Me (Google+)

33. Área entre triángulo y circunferencia.

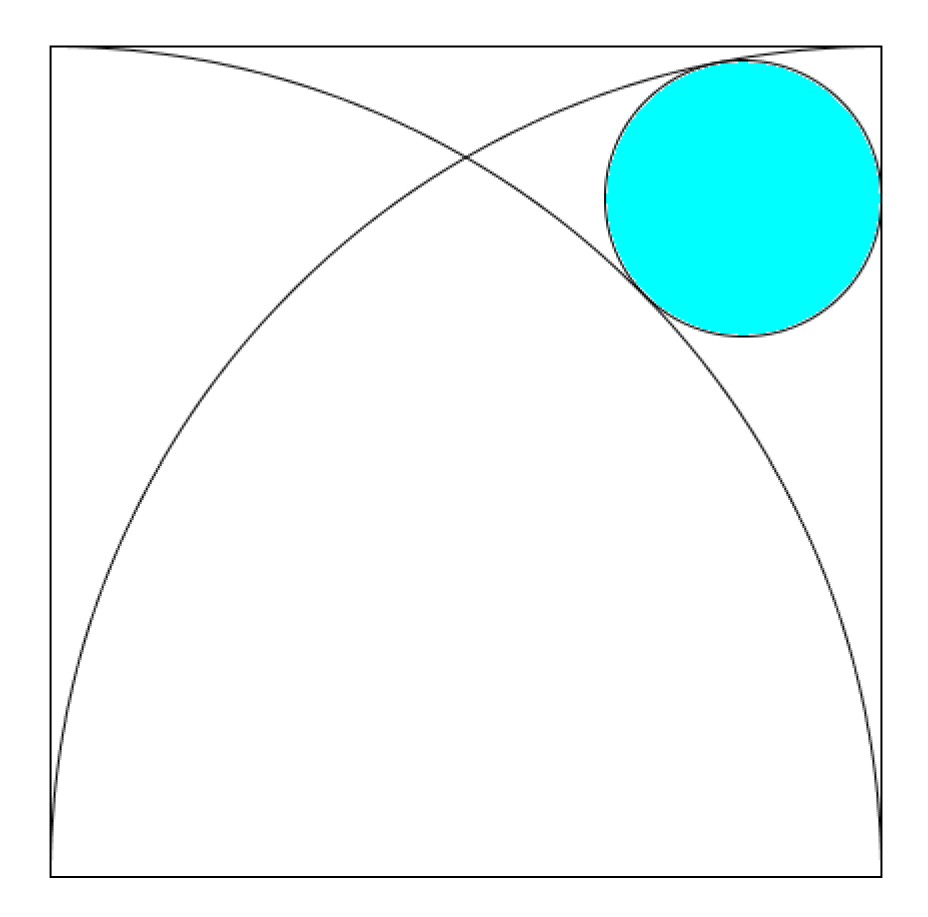
Calcula el área sombreada:



Fuente: Google+
https://plus.google.com/113275398492669368881/posts/B4GDwrCwZdQ

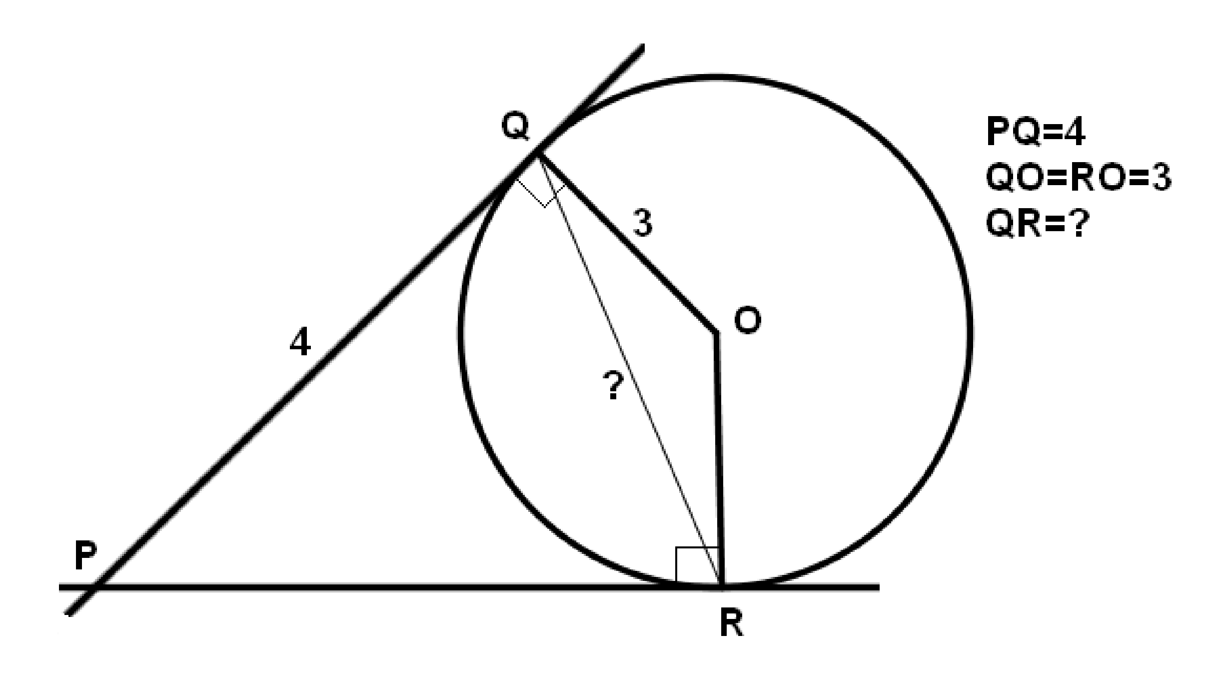
34. Circunferencia inscrita-circunscrita.

Determina el centro y el radio de la circunferencia sombreada, suponiendo un cuadrado de lado 2.



Fuente: https://plus.google.com/115929695407933609149/posts/8jWwxhZeEef

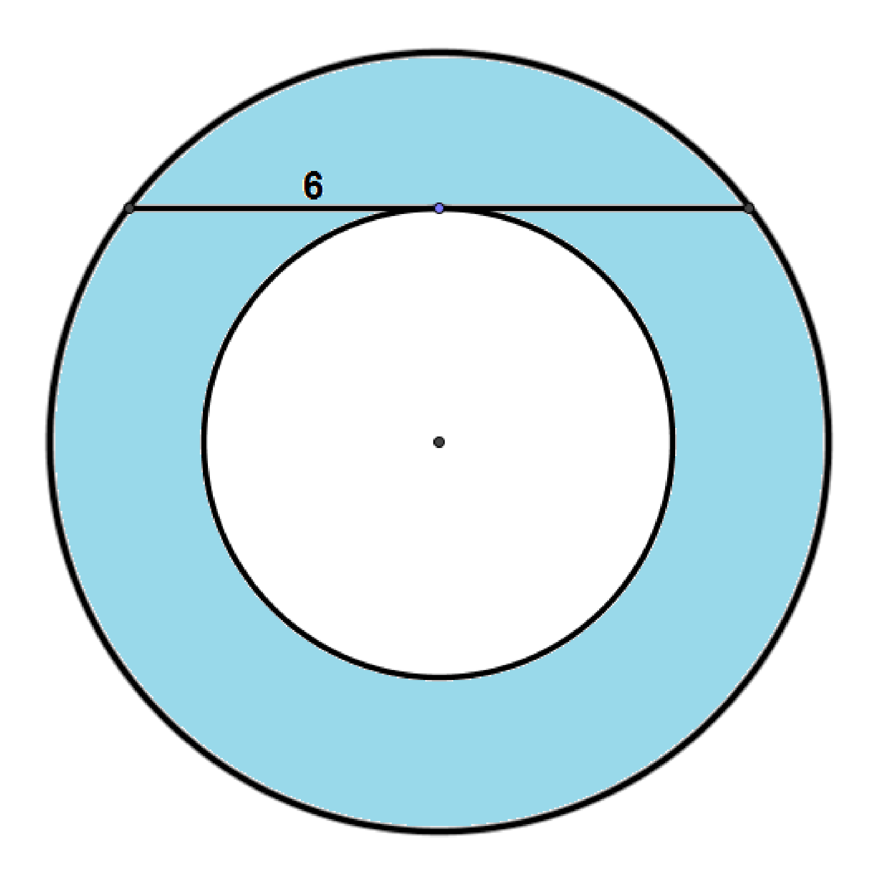
35. Longitud de una cuerda.



Fuente: https://plus.google.com/101381502910275506849/posts/Wyfi44GGcRJ

36. Área entre dos circunferencias dada la cuerda.

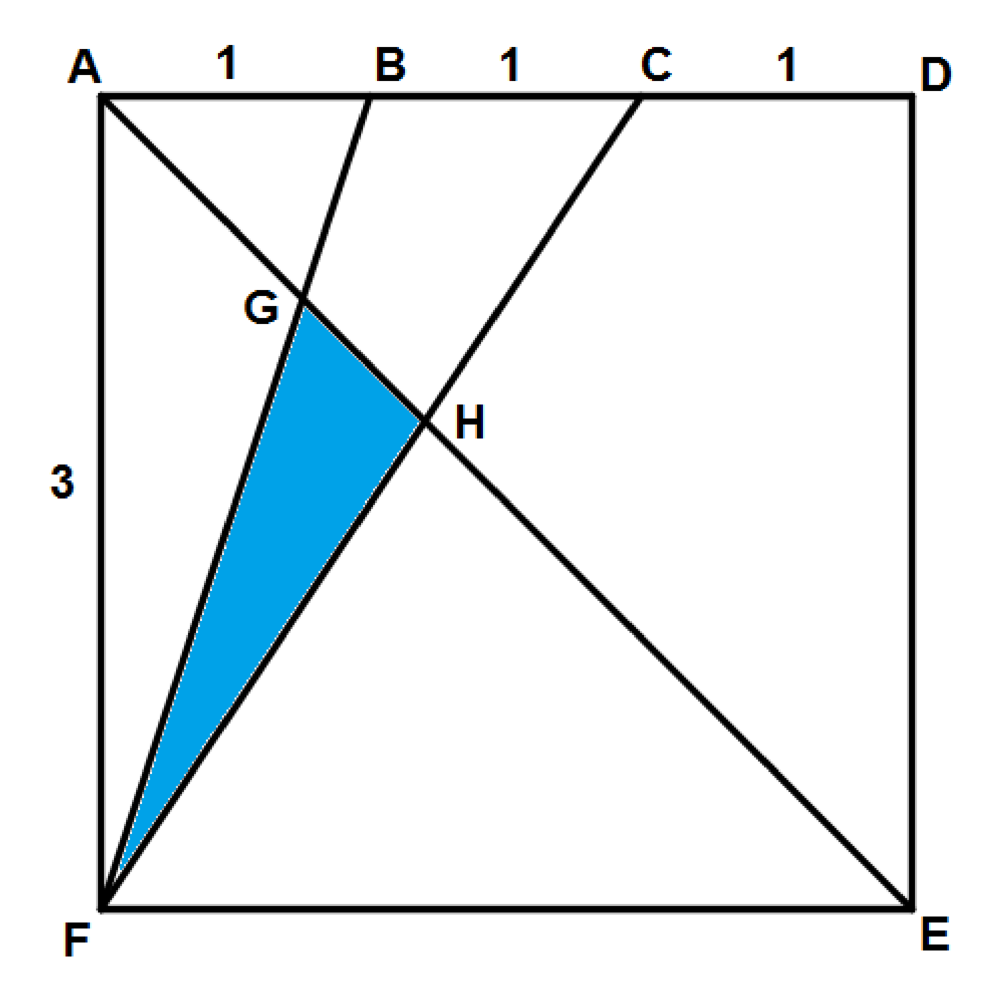
Calcula el área sombreada:



Fuente: http://www.math-principles.com/2014/12/concentric-circles-problems-2.html

37. Área de triángulo.

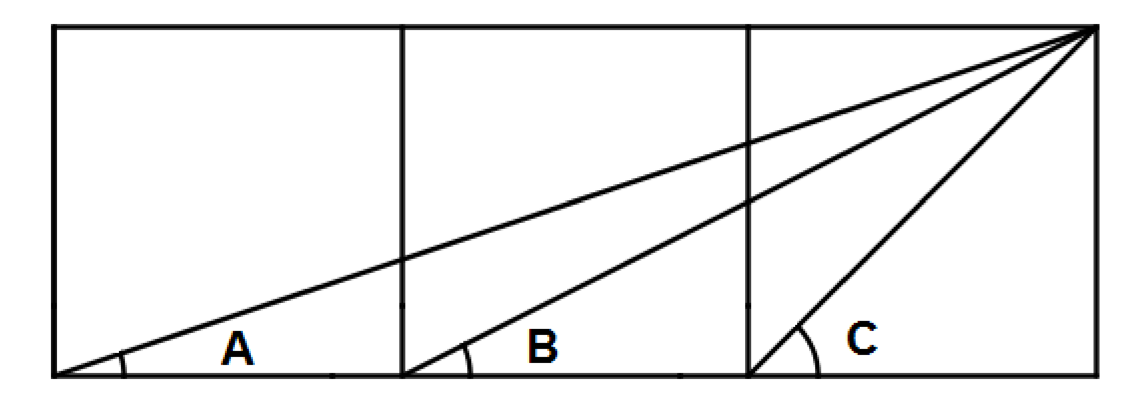
Calcula el área del triangulo FGH



Fuente: https://plus.google.com/118085021625158964074/posts/SqJQ7GCffPQ

38. Determinación de un ángulo.

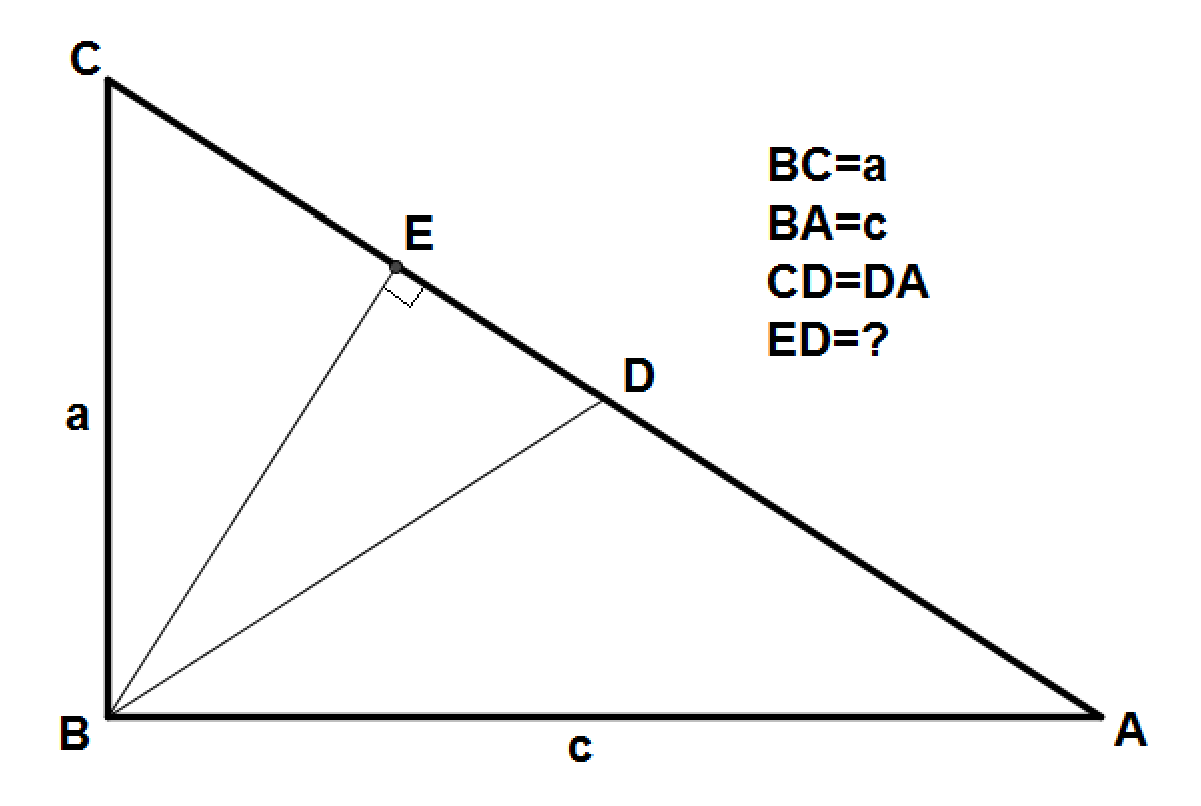
Demuestra que el ángulo C es igual a la suma de los ángulos A y B, sin calcular los ángulos.



Fuente: https://plus.google.com/101998702036074282423/posts/UDmoAZueGvt

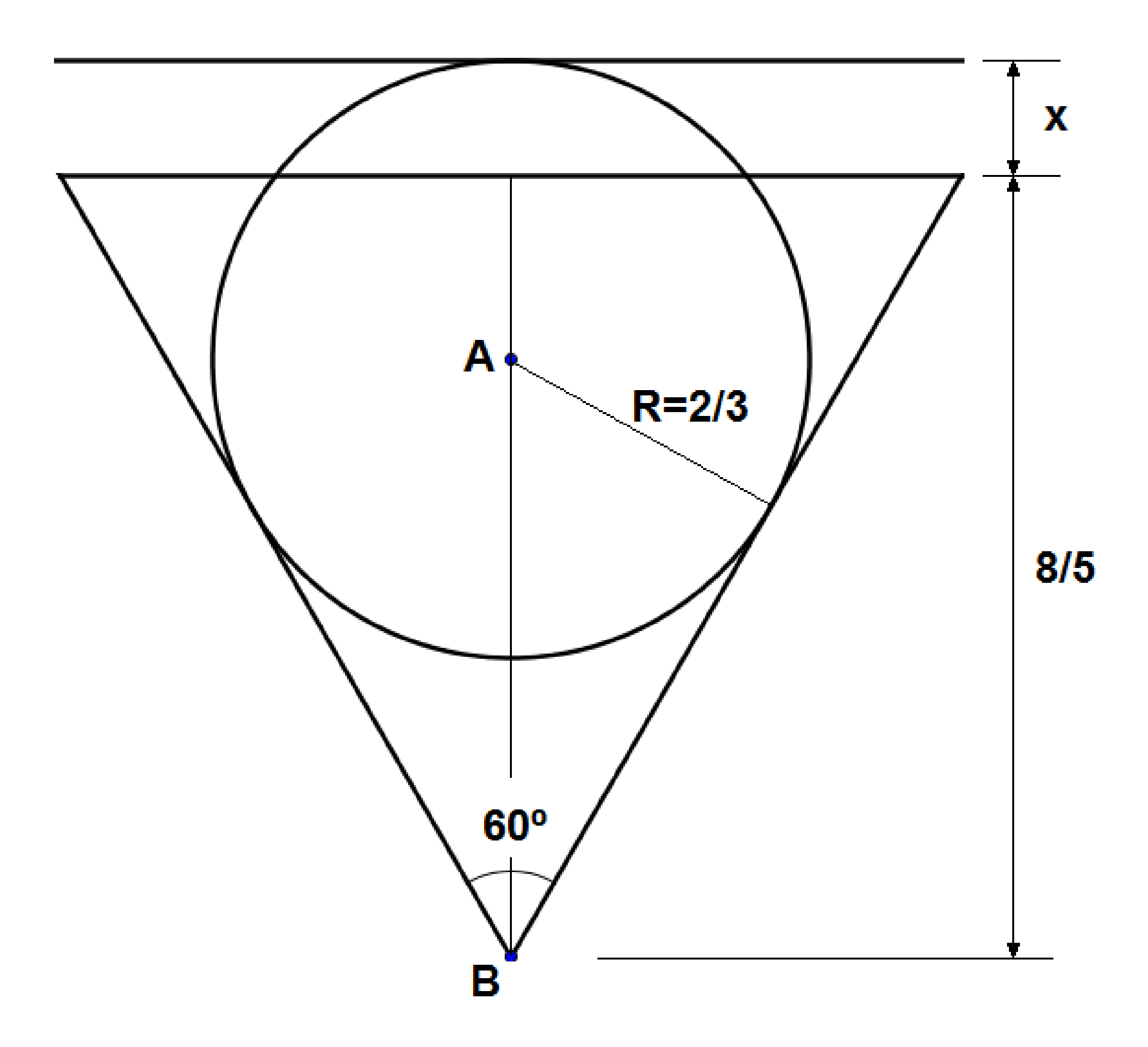
39. Longitud de segmento en triángulo rectángulo.

Determina la longitud ED:



40. Longitud con circunferencia inscrita en triángulo.

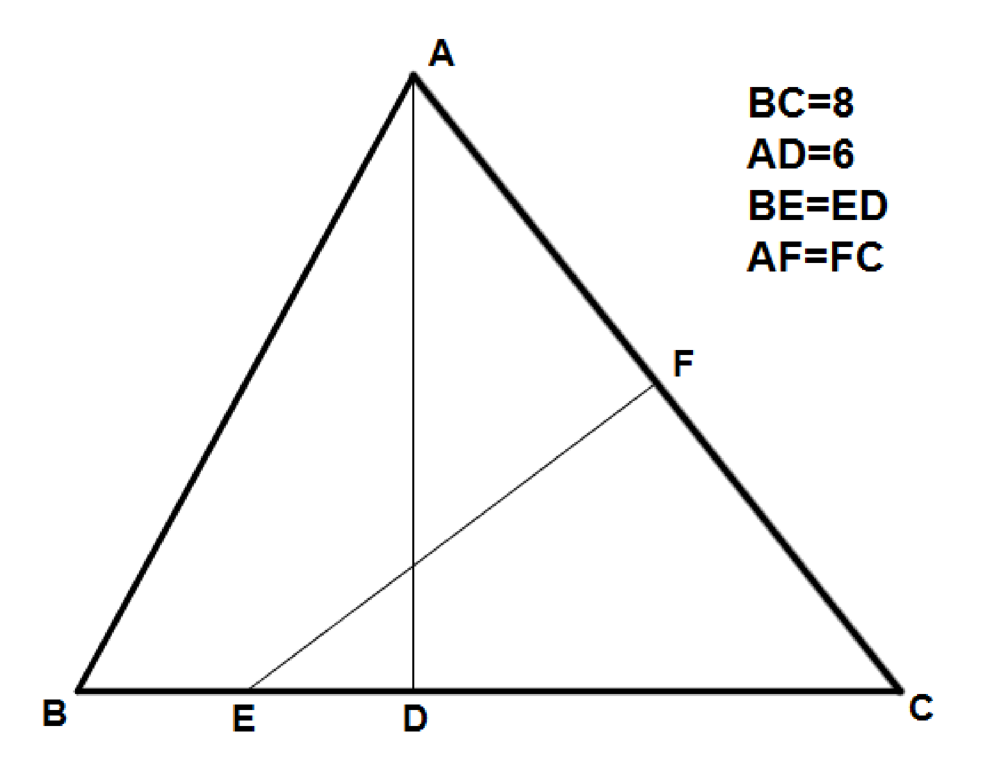
Calcula la longitud x:



Fuente: https://plus.google.com/u/0/101381502910275506849/posts/8gErko1PDSu

41. Longitud de segmento en un triángulo.

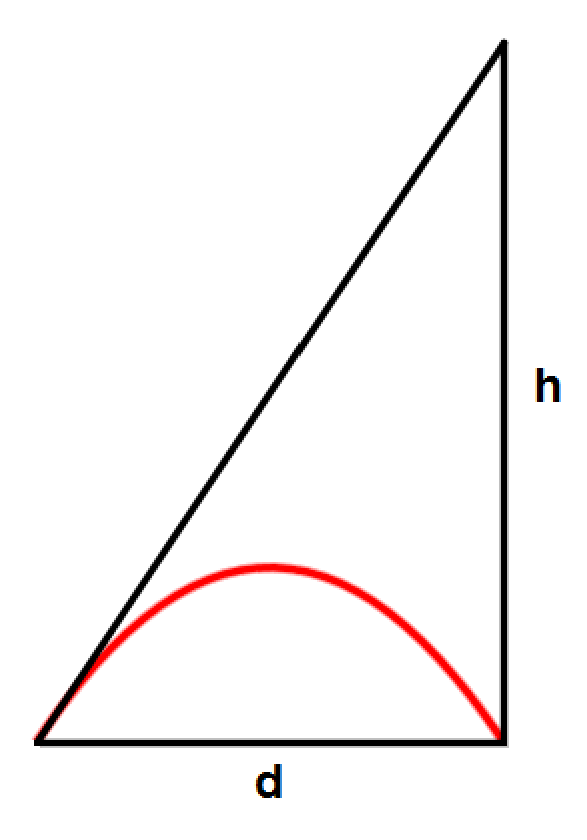
Calcula la longitud del segmento EF



Fuente: https://plus.google.com/101381502910275506849/posts/VHGr5xuG8ou

42. Parábola inscrita en un triángulo rectángulo.

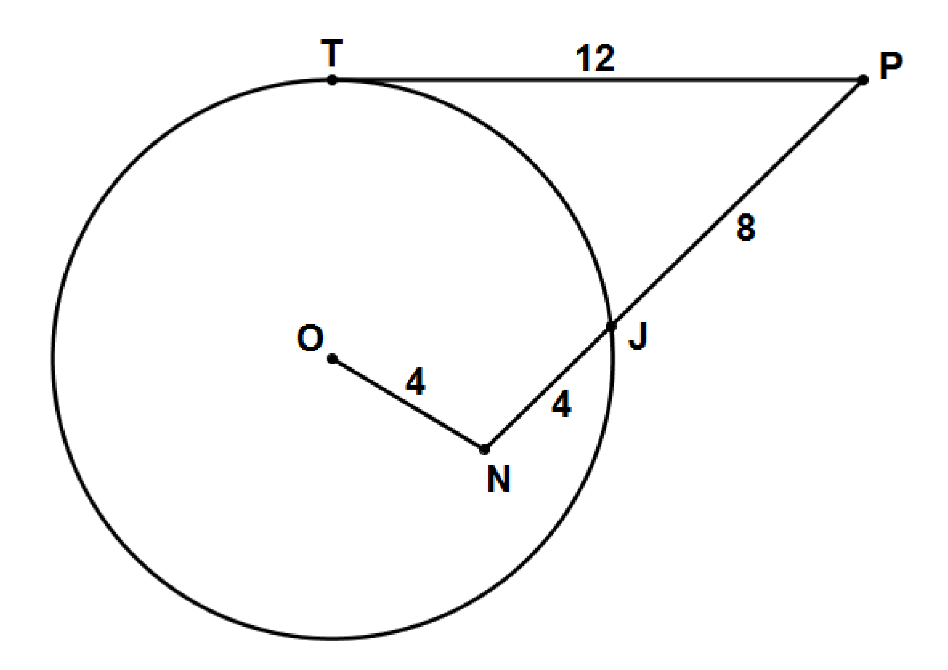
Determina la parábola inscrita en un triángulo rectángulo y tangente a su hipotenusa en el vértice:



Fuente: https://plus.google.com/117684142435389193789/posts/QojwJwY4NvM

43. Radio de una circunferencia dada una tangente, secante y segmento.

Determinar el radio de la circunferencia:

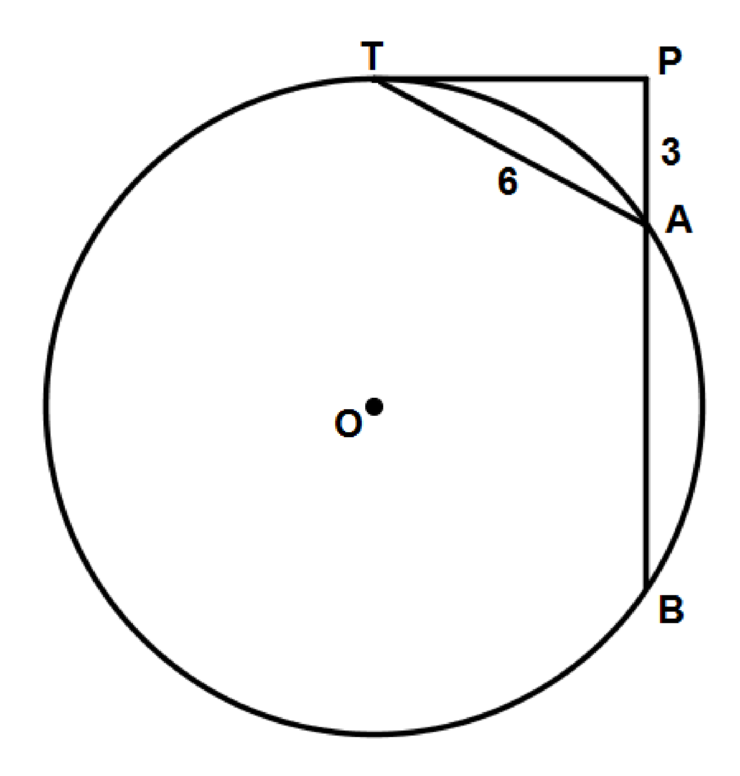


Fuente: http://www.math-principles.com/2014/12/circle-and-secant-segment-problems-6.html

Indicación: http://www.toomates.net/a2014/des/cuerda_secante_tangente.doc

44. Tangente y secante a una circunferencia.

Dada la siguiente figura, en la que PT es tangente a la circunferencia, la secante AB es perpendicular a PT en P, TA=6, y PA=3



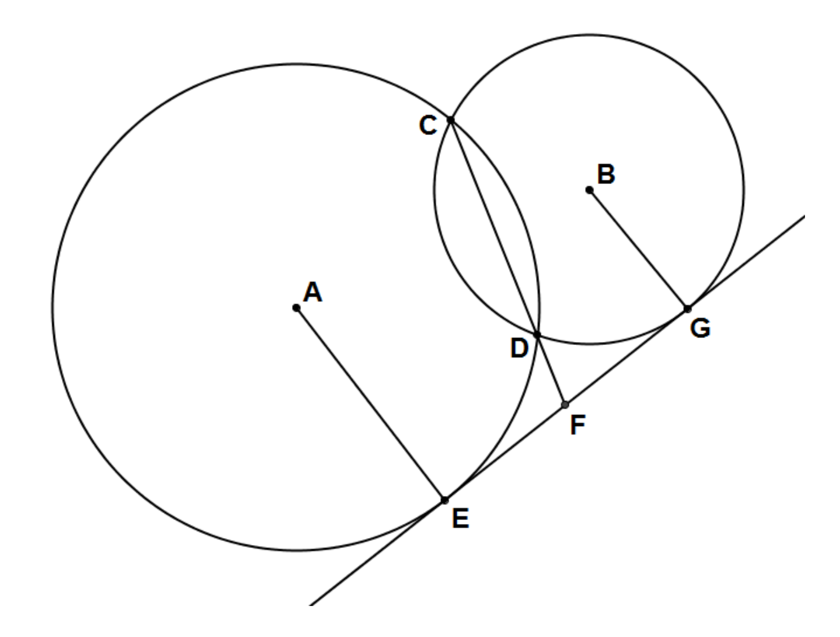
Determina:

a) La distancia de O a AB.
b) La longitud AB.
c) El radio de la circunferencia.

Fuente: http://www.math-principles.com/2014/12/circle-and-secant-segment-problems-3.html

45. Punto medio en tangente de dos circunferencias.

Demostrar que dadas dos circunferencias con una cuerda común CD y una recta tangente común EG, el punto F de intersección de la cuerda y la tangente es el punto medio de EG.

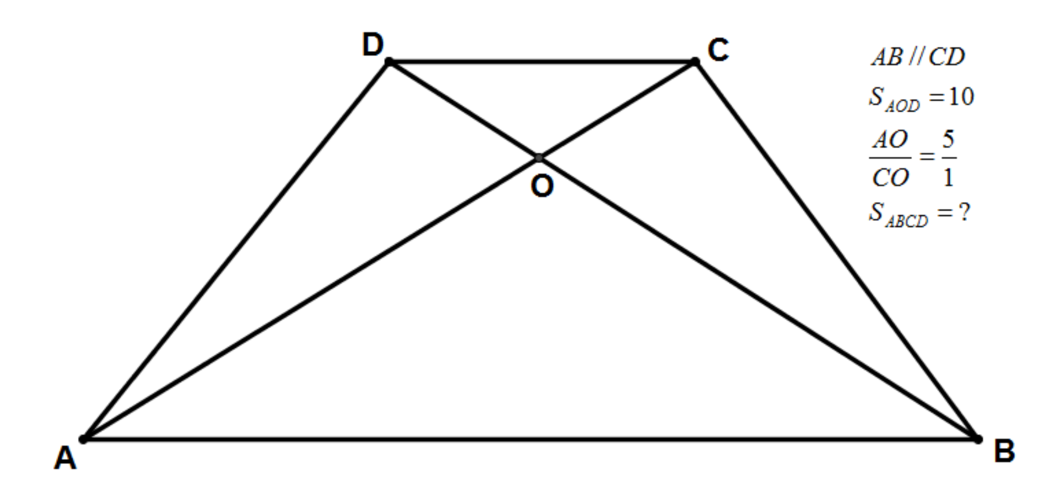


Fuente: http://www.math-principles.com/2014/12/proving-of-two-intersecting-circles.html

Indicación: http://www.toomates.net/a2014/des/cuerda_secante_tangente.doc

46. Área de un cuadrilátero.

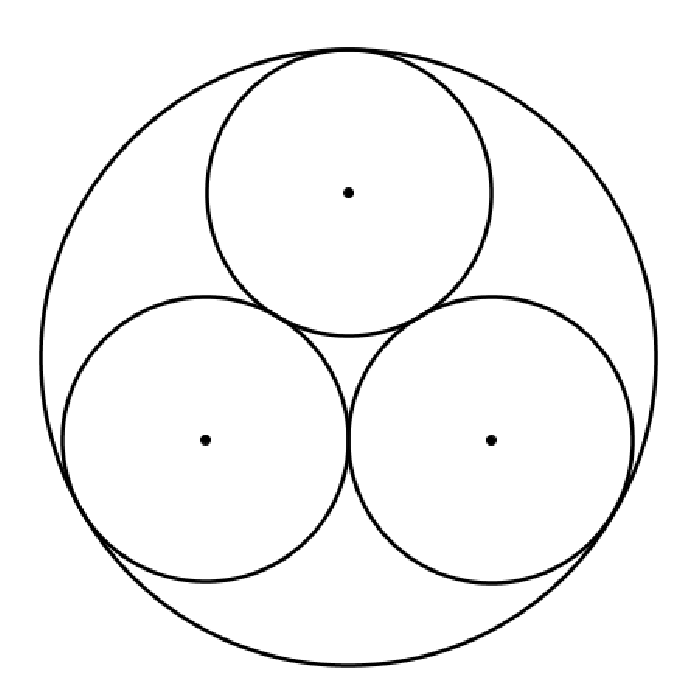
Determina el área del cuadrilátero ABCD sabiendo que el segmento AB es paralelo a DC, el triángulo AOD tiene área 10 y $\frac{AO}{CO} = \frac{5}{1}$



Fuente: https://plus.google.com/108257968126662256318/posts/A7nUREuAwYm

47. Superficie con círculos tangentes.

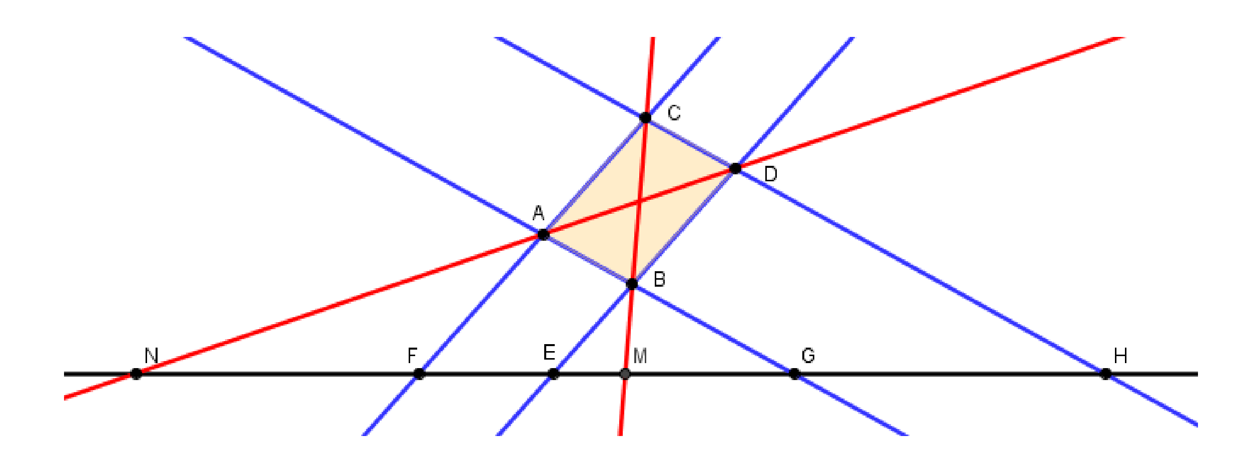
Calcula la superficie del circulo exterior, sabiendo que los círculos interiores tienen radio 1. Escribe el resultado en la forma $\left(\frac{a+b\sqrt{3}}{c}\right)\pi$



Fuente: https://plus.google.com/107094783711806719125/posts/4xrZJ1oQE4h

48. Puntos fijos en un paralelogramo.

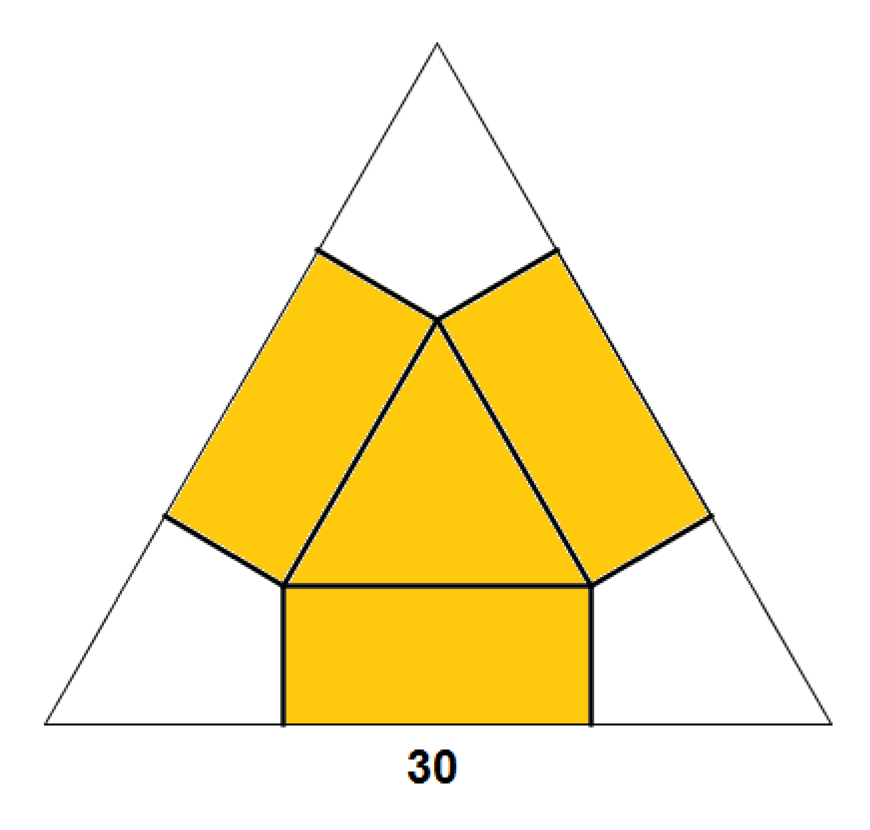
Tenemos un paralelogramo ABCD, y supongamos que sus lados cortan una recta dada en cuatro puntos fijos F, E, G y H. Demostrar que entonces sus diagonales AD y BC también cortan dicha recta en dos puntos fijos N y H.



Fuente: http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/Catalan.shtml

49. Volumen máximo de caja triangular.

Calcula el volumen máximo de una caja construida a partir de un triángulo equilátero de 30 cm de lado:



Fuente: https://plus.google.com/115929695407933609149/posts/8ZsSVgUqqQ8

50. Determinación del valor de una función continua.

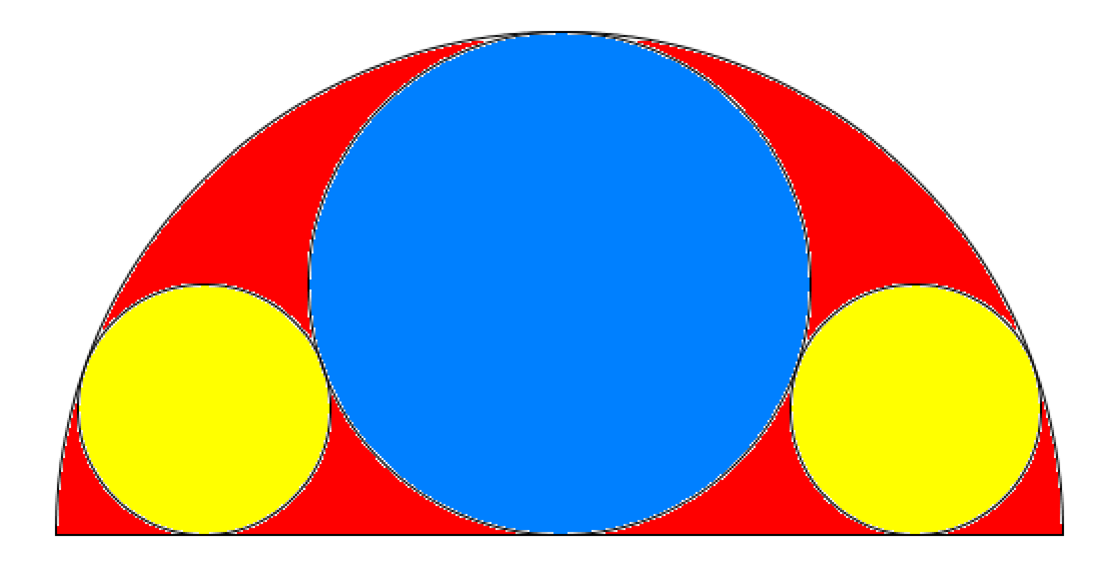
Sea $f(x):\Re \to \Re$ continua tal que $f(x)\cdot f(f(x))=1$ para todo $x\in\Re$ y $f(1000)=999$. Encontrar $f(500)$.

Leningrad Mathematical Olympiad, 1988

Fuente: https://plus.google.com/115929695407933609149/posts/HhjYdyqWChH

51. Área con tres circunferencias tangentes.

Si el área roja mide 60 centímetros cuadrados, ¿cuánto mide el área amarilla?

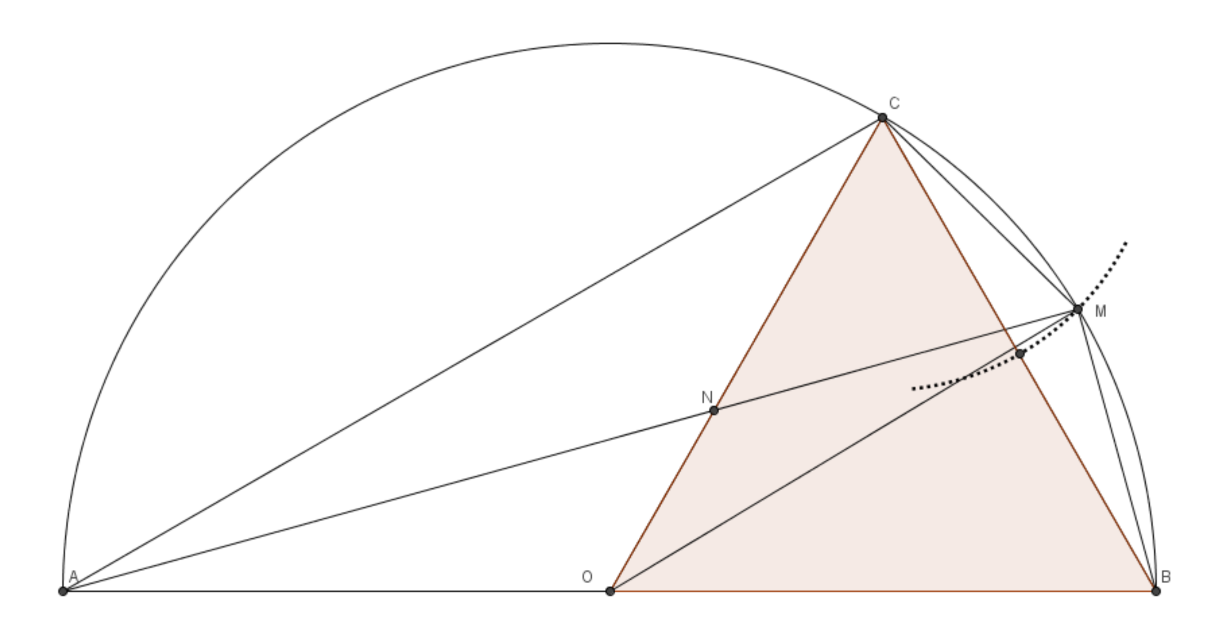


Fuente: http://joselorlop.blogspot.com.es/2015/01/298-un-semicirculo-tricolor.html

52. Razón áurea en una semicircunferencia.

En una semicircunferencia con centro en O y diámetro AB construimos un triángulo equilátero con base OB. Sea M el punto de la semicircunferencia tal que $CM = \frac{1}{2}BC$.

Definimos N como la intersección de AM y OC. Demostrar que $\frac{CN}{NO} = \phi$, la razón áurea.



Fuente: http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/BuiGoldenRatio2.shtml

53. Simplificación de raíces encadenadas.

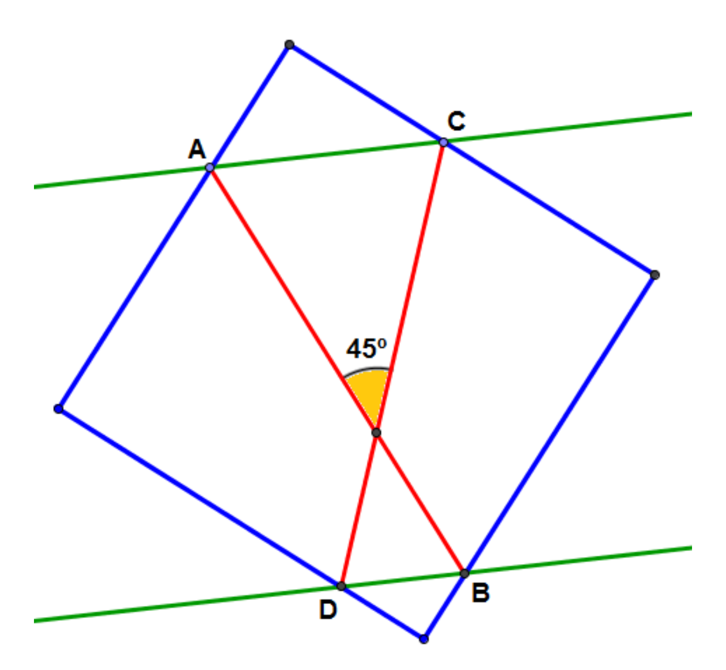
Calcula el valor de

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+2013\sqrt{1+2014\sqrt{1+2015\cdot 2017}}}}}$$

Fuente: https://plus.google.com/115929695407933609149/posts/PgjYGX8ZsLD

54. Ángulo con dos rectas paralelas en un cuadrado.

Sea un cuadrado de lado d y dos rectas paralelas separadas por una distancia también d. Sean A, B, C y D los puntos de corte de estas rectas con el cuadrado. Demostrar que las rectas AB y CD determinan un ángulo de 45º.



Fuente: http://www.mathteacherctk.com/blog/2013/05/a-square-in-parallel-lines/#solution

55. Ecuación con valor absoluto.

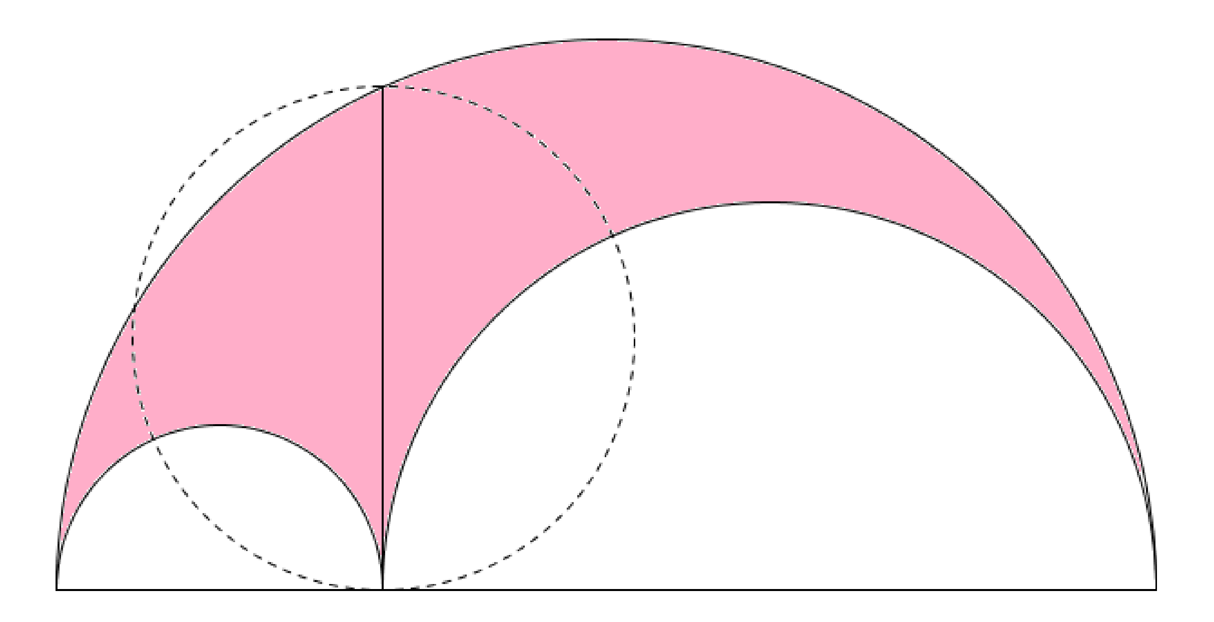
Resuelve la ecuación

$$|x+1| + \frac{1}{|x+1|} + \frac{1}{\frac{1}{|x+1|}} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{|x+1|}}} = 4$$

Fuente: www.matematyczny-swiat.pl/2015/01/rownanie-z-moduem.html

56. Área de un doble eclipse.

Determina la razón entre la zona sombreada y el área del círculo de línia discontínua.

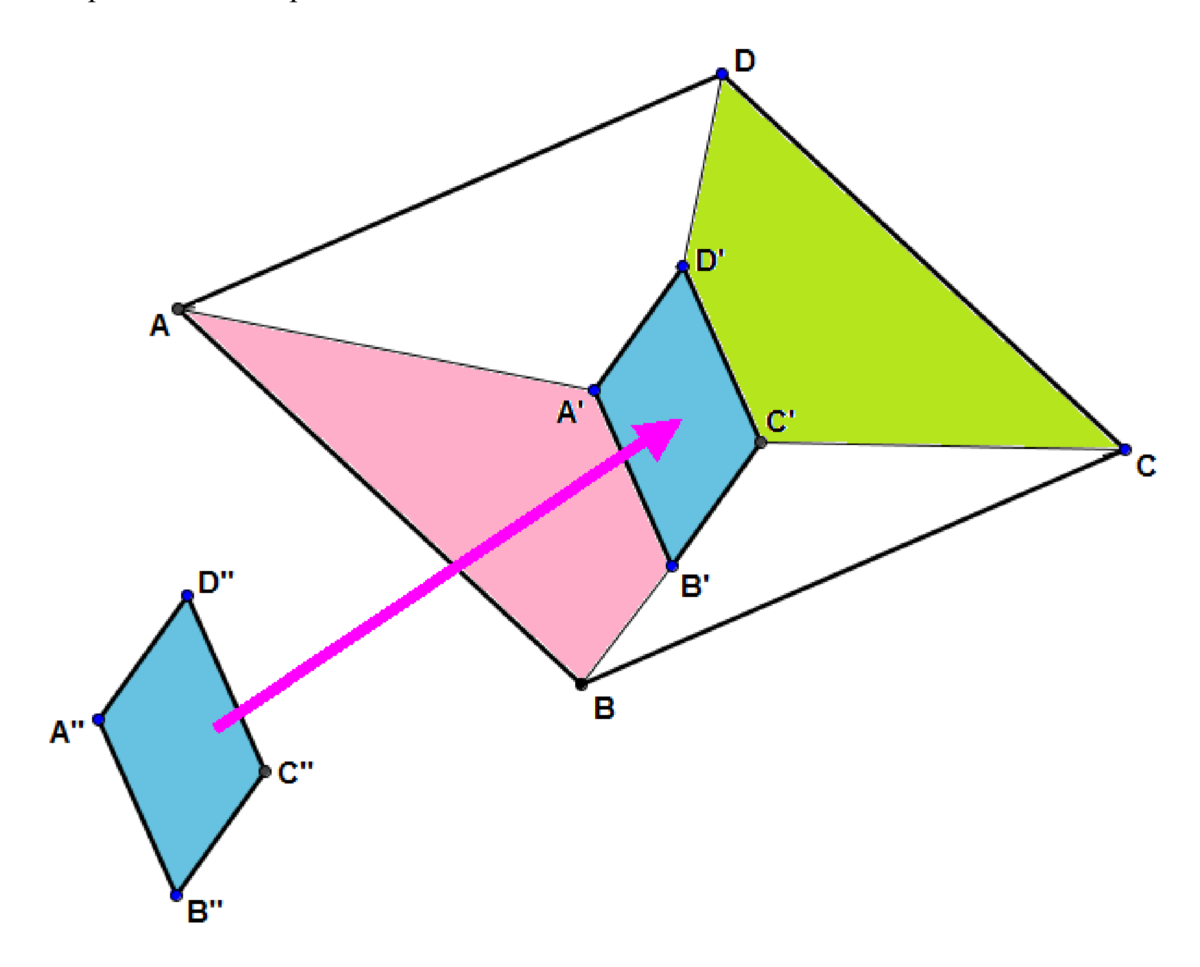


Font: https://plus.google.com/u/0/+JeanDAVID/posts/AFqxzYqyr9y

57. Área independiente de la traslación de un cuadrilátero.

Sea ABCD y A’’B’’C’’D’’ dos paralelogramos y A’B’C’D’ la traslación del segundo paralelogramo dentro del primero.

Demostrar que la suma de las áreas de los cuadriláteros ABB’A’ y CDD’C’ es independiente de la posición de A’B’C’D’ dentro de ABCD.



Fuente: http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/BuratinoAreaLemma.shtml

58. Números de tres cifras que suman 11.

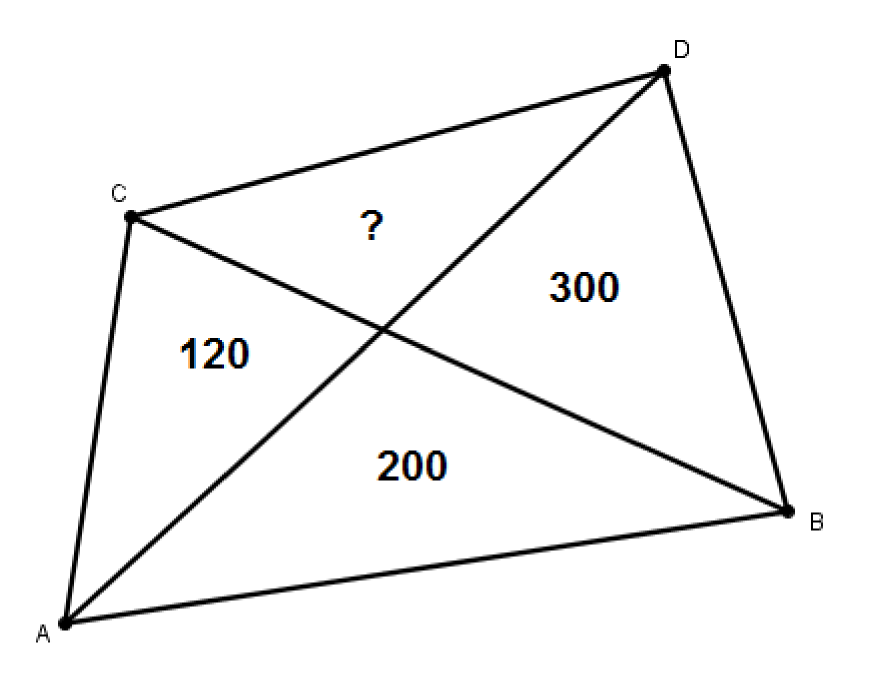
¿Cuantos números hay de tres cifras cuyos tres dígitos sumen 11 ?

How many 3 digit integers are there such that the sum of all the digits of the integer is equal to 11.

Fuente: JEE Advanced Math Problem 13.

59. Área de una pieza de un cuadrilátero.

Un pastel tiene forma de cuadrilátero. Lo partimos por sus diagonales en cuatro partes, como se indica en la figura. Yo me comí una parte, y después pesé las otras tres: un pedazo de 120g, uno de 200g y otro de 300g. ¿Cuánto pesaba la parte que yo me comí?



Problema de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Fuente: https://plus.google.com/+math2me/posts/RRUApggXaWx

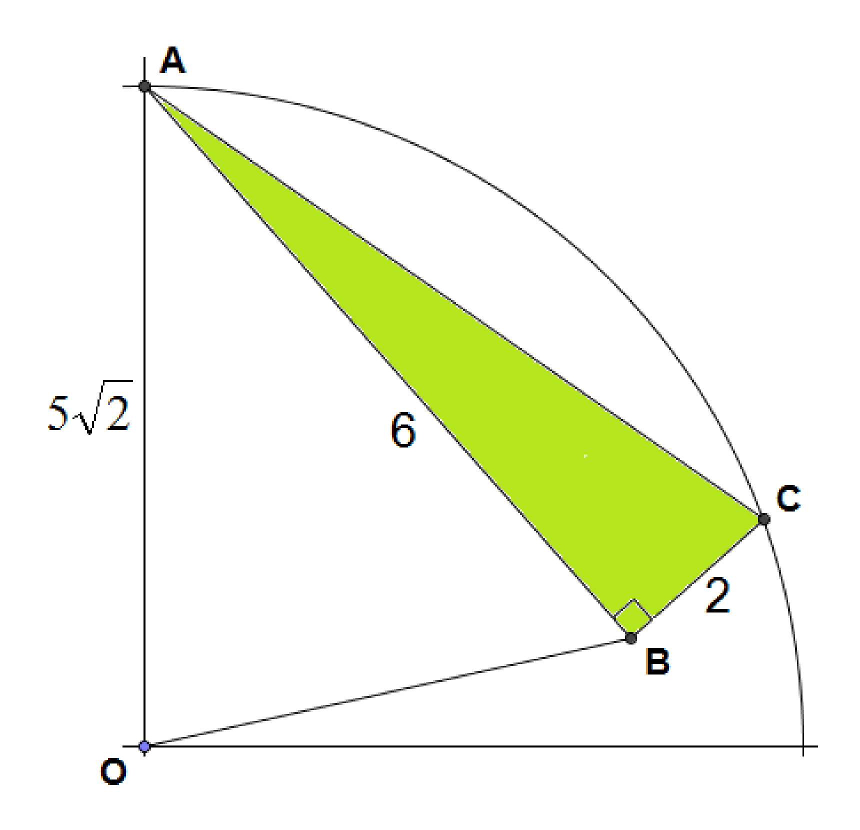
60. Serie de fracciones.

Demostrar que

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+...+n}=\frac{n-1}{n+1}$$

Fuente: http://www.i-precalculus.com

61. Triángulo rectángulo interior en un círculo.



Radio $OA = 5\sqrt{2}$
$AB = 6, \quad BC = 2$
$\angle ABC = 90^{\circ}$
$Longitud\ OB = ?$

Fuente: Ramesh Chandra
https://plus.google.com/101381502910275506849/posts/JRMsgAhUKQA

62. Múltiplo con todos los dígitos.

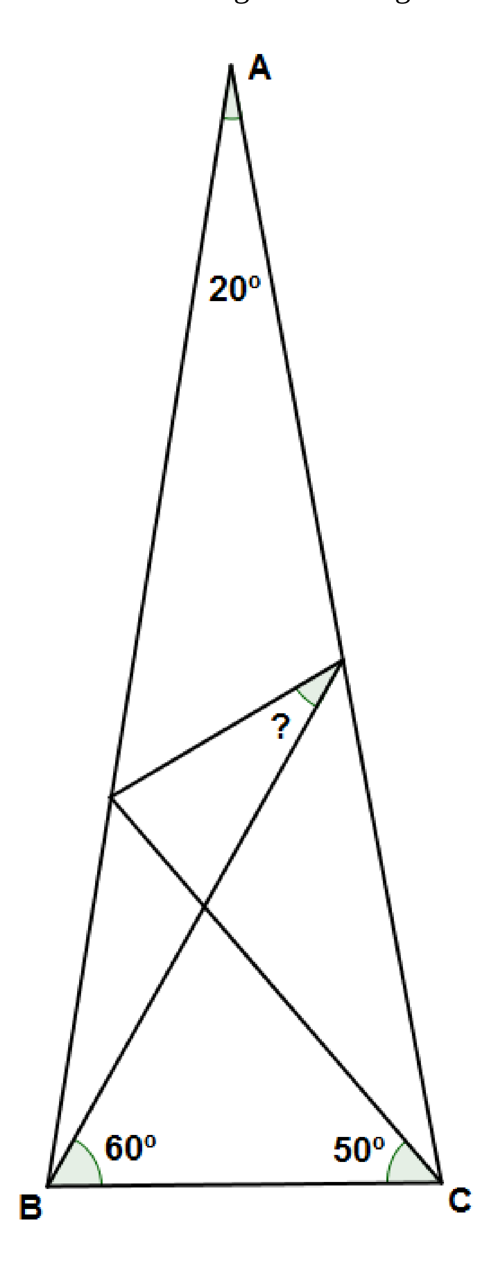
Demuestra que todo entero positivo tiene un múltiplo cuya representación decimal incluye todos los diez dígitos.

(1956 Putnam Exam)

Fuente: Math Problem Book I compiled by Kin Y. Li, Hong Kong Mathematical Society. www.toomates.net/Llistes/a2015/mai/Math_Problem_Book_I_Kin_Y_Li.pdf

63. Ángulo interior en un triángulo isósceles.

Determina el ángulo indicado con **?** en el siguiente triángulo isósceles:



Fuente: https://plus.google.com/112380179437227522830/posts/4eicibZY5cn

64. Potencia quinta de un polinomio.

Demuestra que si

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$$

entonces

$$(a+b+c)^5 = a^5 + b^5 + c^5$$

Fuente: Quora.com: http://www.quora.com/If-a-%2Bb%2Bc-3-a-3-%2B-b-3-%2B-c-3-how-can-I-prove-a%2Bb%2Bc-5-a-5-%2B-b-5-%2B-c-5

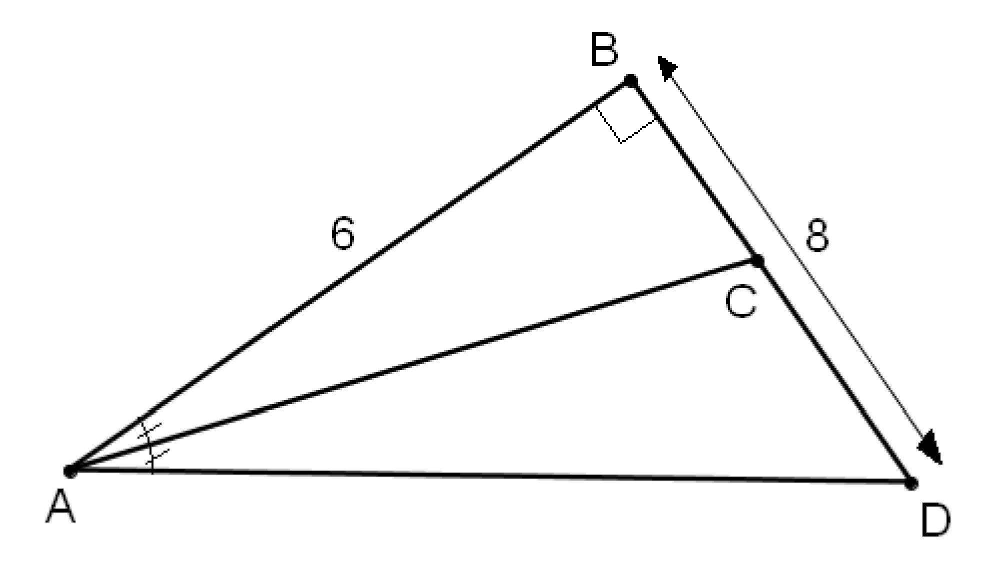
65. Suma de cubos.

Demuestra que si $x + y + z = 0$ entonces $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Fuente: https://plus.google.com/111517516650737172857/posts/9DL7HCi35qX

66. Triángulo con bisectriz y ángulo recto.

Dado el siguiente triángulo:



Determina:

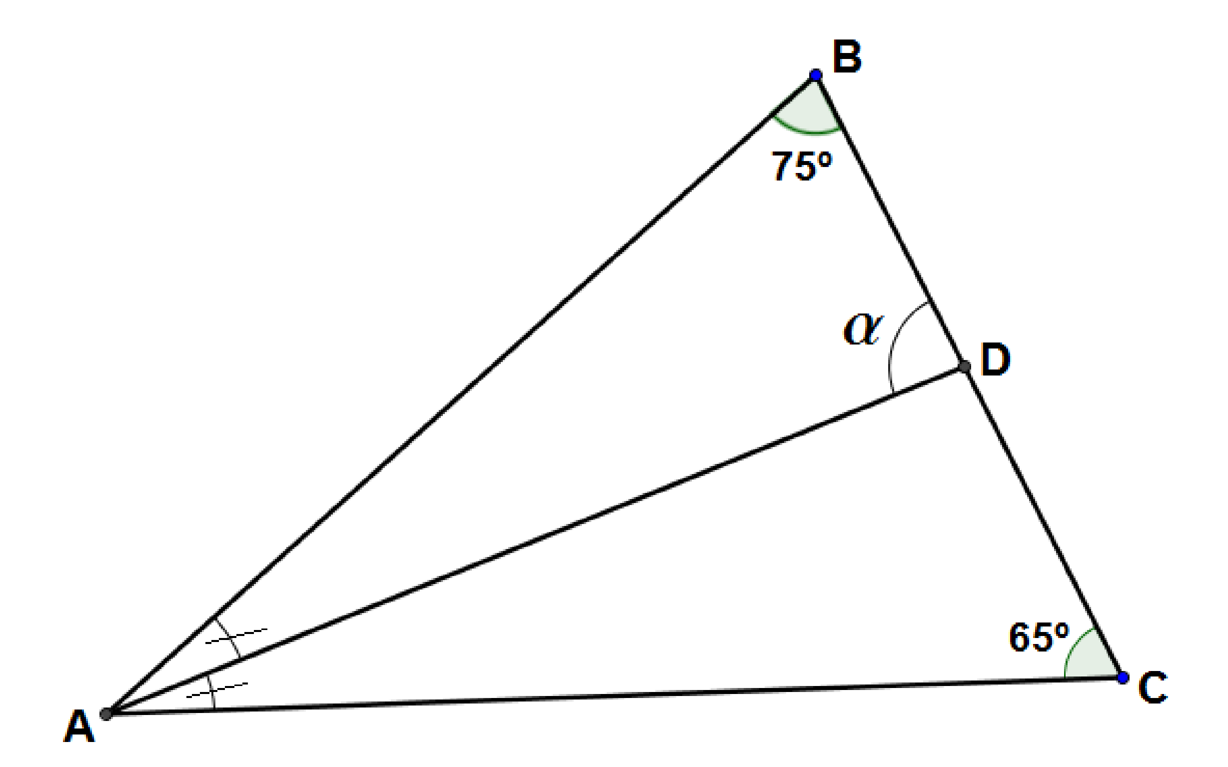
a) Las distancias AB, AC, AD, BC y CD.

b) El área de los triángulos ABC y ACD.

Fuente: http://www.dummies.com/how-to/content/how-to-use-the-anglebisector-theorem.html

67. Ángulos de un triángulo con bisectriz.

La recta AD es una bisectriz del triángulo ABC. Determina el ángulo α .



68. Problema de probabilidad con ecuación de segundo grado.

Tenemos n caramelos en una bolsa. Seis de ellos son naranja, y el resto son amarillos. Hannah toma un caramelo de la bolsa, se lo come y toma un segundo caramelo, que también se come.
La probabilidad de que Hannah se coma dos caramelos naranja es de 1/3. Demuestra que $n^2 - n - 90 = 0$.

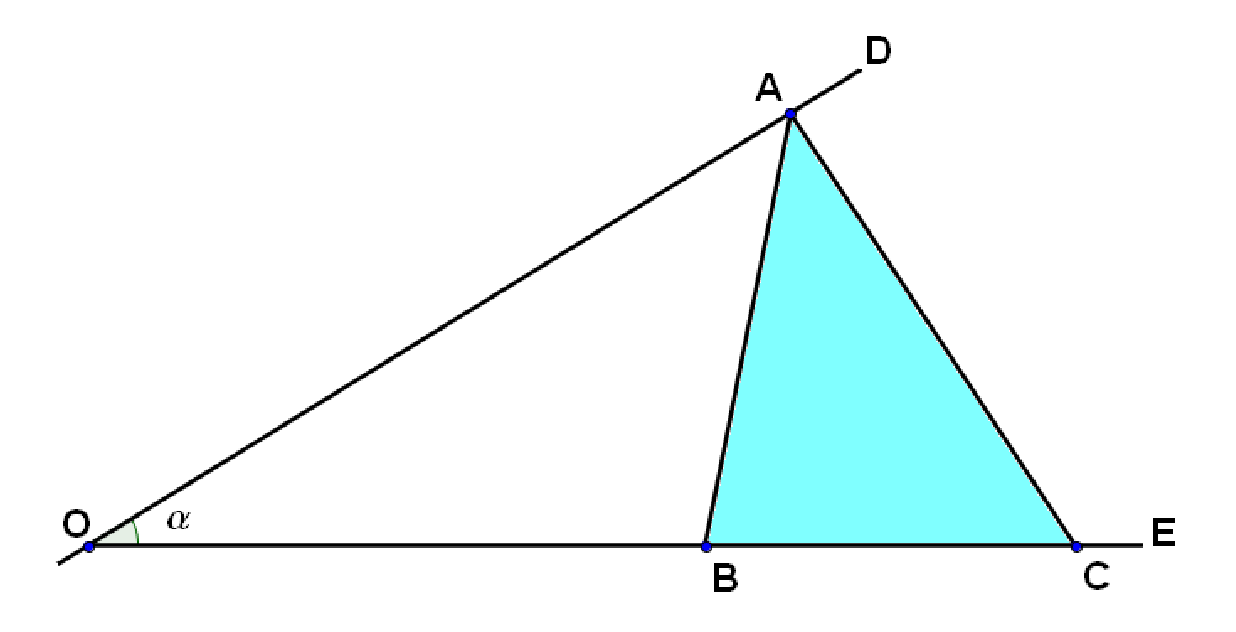
There are n sweets in a bag. Six of the sweets are orange. The rest of the sweets are yellow. Hannah takes a sweet from the bag. She eats the sweet. Hannah then takes at random another sweet from the bag. She eats the sweet. The probability that Hannah eats two orange sweets is 1/3. Show that $n^2 - n - 90 = 0$.

GCSE Probability question 2015

Fuente: http://www.mirror.co.uk/news/uk-news/gcse-maths-question-row-can-5826816

69. Mínimo en la suma de longitudes de dos lados de un triángulo.

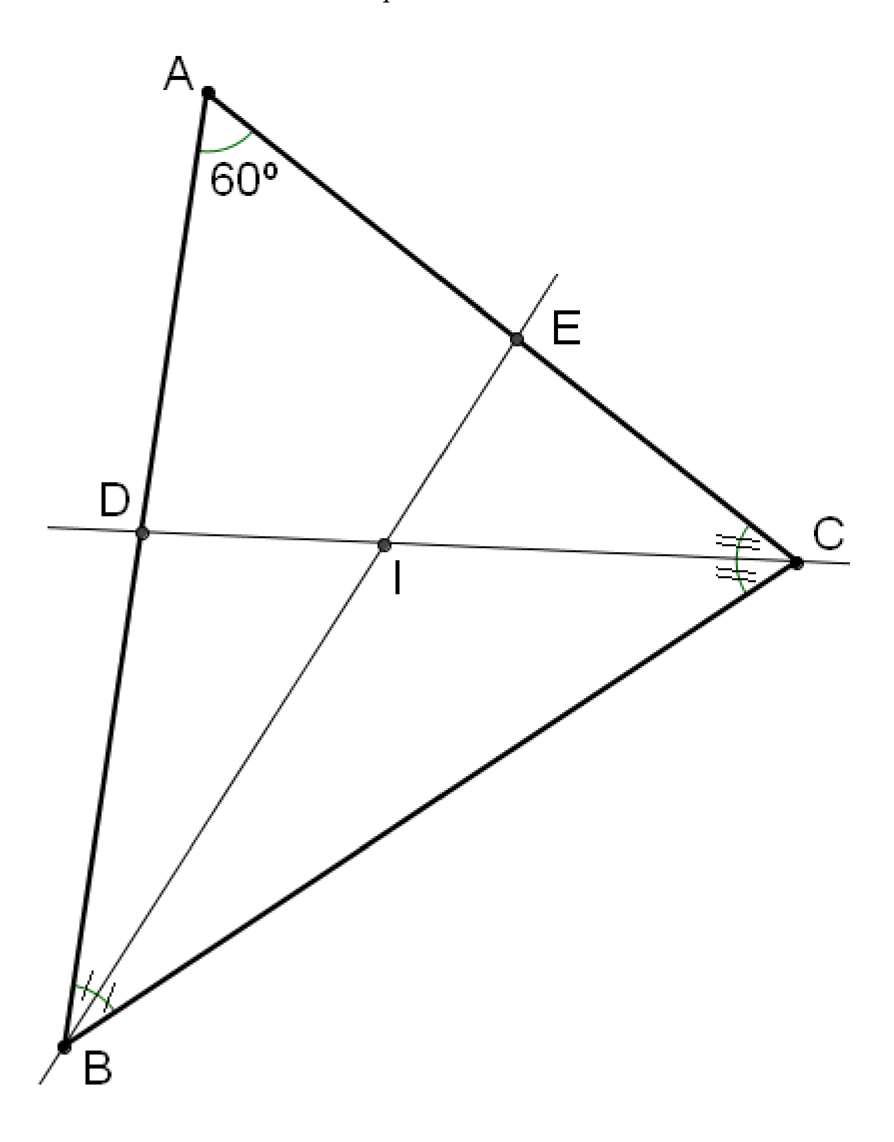
Sea un ángulo $\angle DOE$ y dos puntos fijos $B, C \in \overrightarrow{OE}$. Determina la posición del punto A en OD de forma que la suma $AB + AC$ sea mínima.



Fuente: Problem 3 of Moldova Mathematical Olympiad 2002,
http://www.toomates.net?e=14892 (página 189)

70. Triángulo con ángulo de 60 grados.

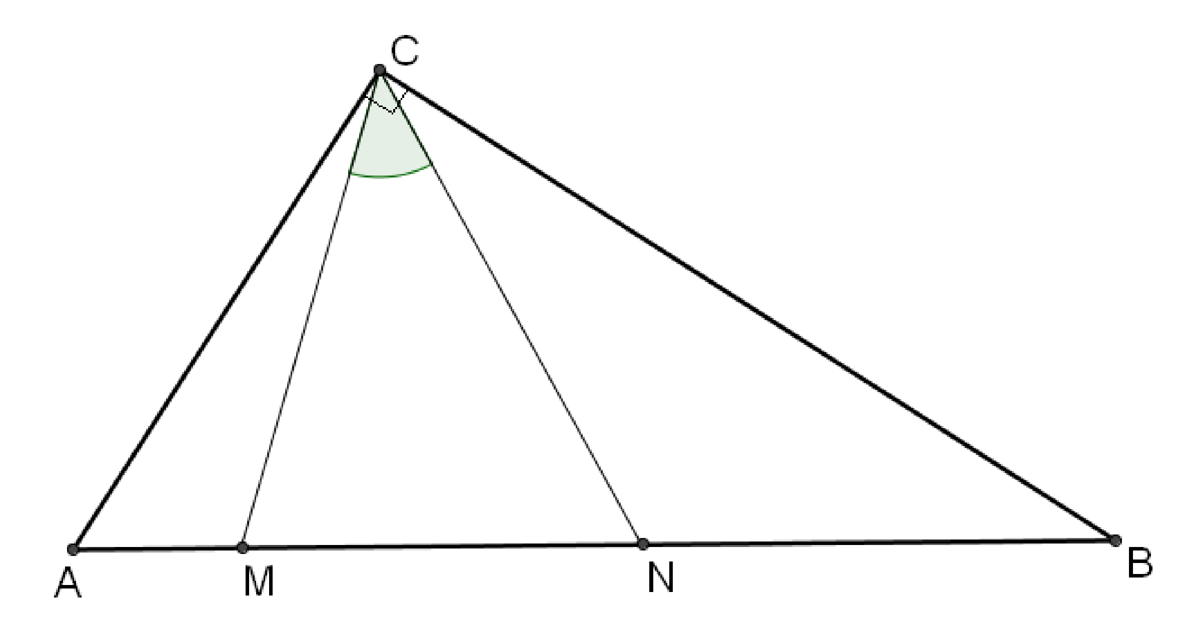
Sea ABC un triángulo en el cual $\angle BAC = 60º$ y BE y DC son dos bisectrices que se encuentran en el incentro I. Demostrar que $DI = IE$.



Fuente: http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/TriangleWith60degAngle.shtml

71. Triángulo rectángulo y dos puntos de la hipotenusa.

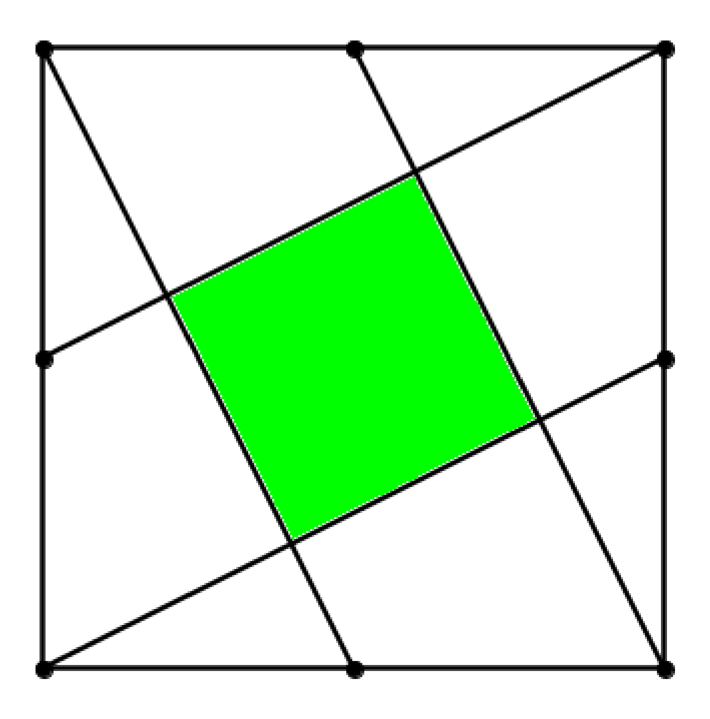
Sea el triángulo ABC rectángulo en C y los puntos $M, N \in AB$ tales que $BC = BM$ y $AC = AN$. Demostrar que $\angle MCN = 45^{\circ}$.



Fuente: Problem 1 of Tournament of Towns 1993.
http://www.toomates.net?e=14892 (página 368)

72. Área de un cuadrado interior.

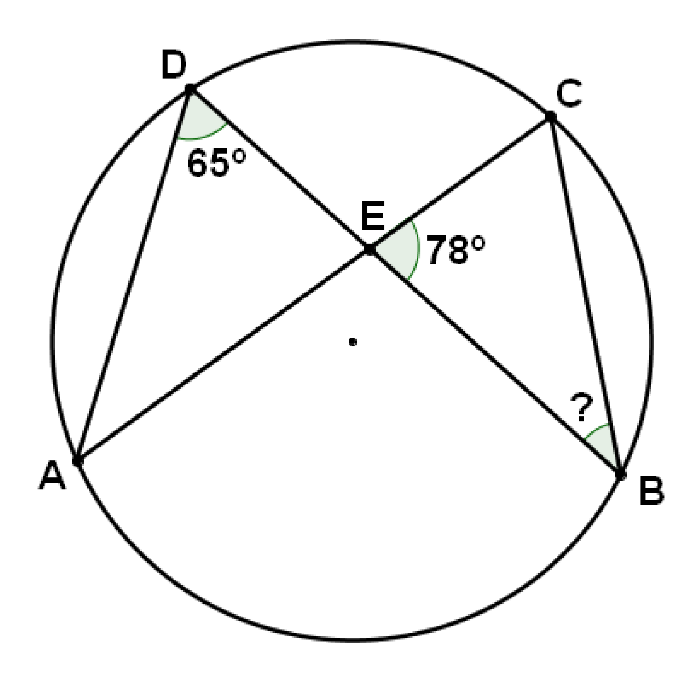
Hemos construido el cuadrado interior verde mediante segmentos que unen los puntos medios de cada lado con los vértices. Demuestra que su área es $\frac{1}{5}$ del área del cuadrado grande.



Fuente: Google+

73. Determinación del ángulo en un cuadrilátero.

En la siguiente figura determina el ángulo $\angle EBC$:



74. Ecuación con producto de polinomios de segundo grado.

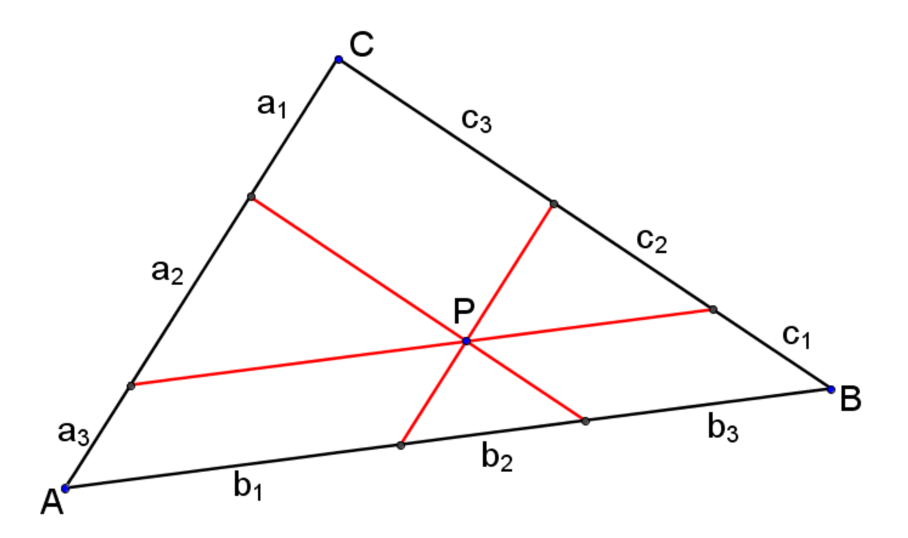
Dado el polinomio de segundo grado $p(x) = x^2 + ax + b$, con a y b enteros, probar que, para cualquier entero n, existe un entero m tal que $p(n) \cdot p(n+1) = p(m)$

Fuente: http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/PropertyOfQuadraticPolynomials.shtml

75. Producto de segmentos en triángulo con punto interior.

Sea ABC un triángulo y P un punto interior. Lanzamos por P rectas paralelas a cada uno de los lados, cuyos puntos de intersección con el triángulo dividen cada lado en tres segmentos.

Demuestra que $a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 = a_3 \cdot b_3 \cdot c_3$



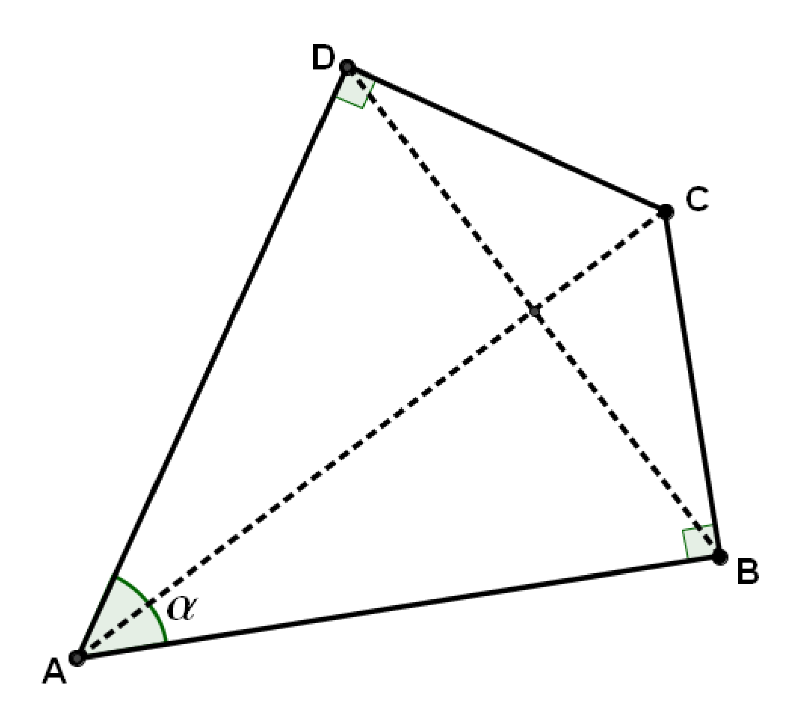
Fuente: http://www.cut-the-knot.org/triangle/PleasantProportionsInTriangle.shtml

The problem has been offered at the 1990 USSR mathematical olympiad for grade 9 (B. Chinik, Kishinev.)

76. Seno del ángulo de un cuadrilátero con ángulos rectos.

Sea el cuadrilátero ABCD, tal que $\angle ADC = \angle ABC = 90^{\circ}$. Sea $\alpha = \angle DAB$.

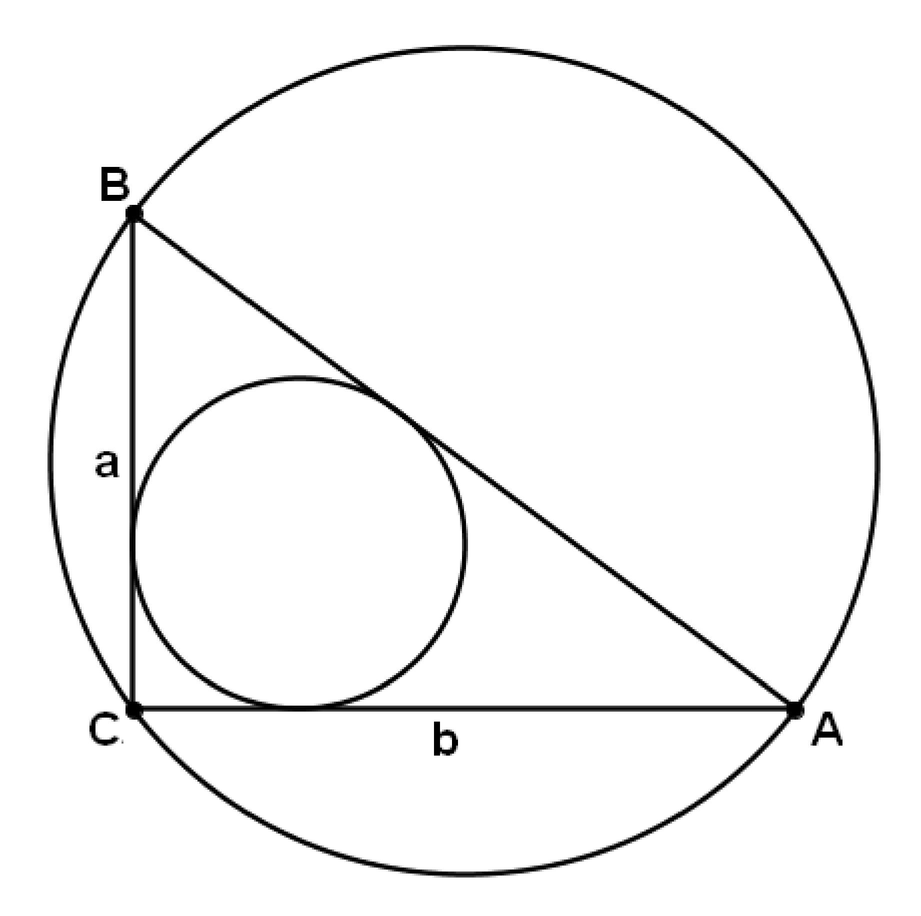
Demuestra que $\sin(\alpha) = \frac{BD}{AC}$



Fuente: https://plus.google.com/+JeanDAVID/posts/MKnC23vRtq3

77. Suma de los diámetros inscrito y circunscrito en función de los catetos.

Dado el triángulo rectángulo *ABC*, de catetos a y b, trazamos su circunferencia inscrita y su circunferencia circunscrita. Determina el valor de la suma de los diámetros de estas dos circunferencias en función de a y de b.



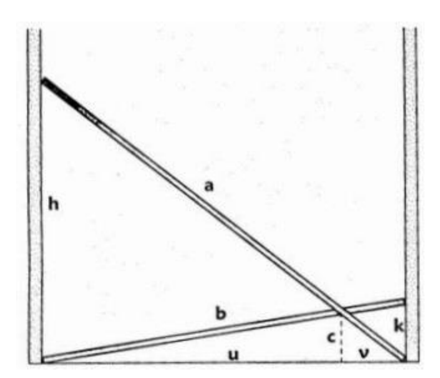
Fuente: https://plus.google.com/112205706453887804978/posts/ZpRuGKhugwQ

Soluciones

Nota: Se ofrecen soluciones completas a todos y cada uno de los ejercicios. Estas soluciones son, si no se indica lo contrario, del autor de esta recopilación, Gerard Romo. No pretende con ellas exhibir erudición: no son necesariamente las mejores ni las más bellas ni las óptimas. Seguro que tú encuentrarás soluciones alternativas mucho más bellas que las mías.

1.

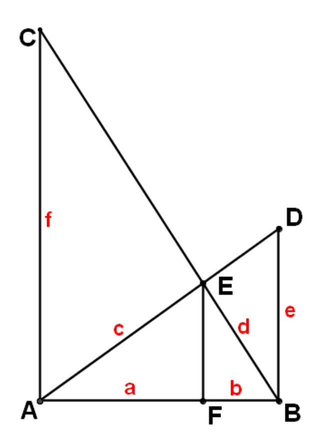
Este es un problema de geometría clásico, llamado "**problema de las escaleras cruzadas**" pues lo podemos interpretar como una situación en la que dos escaleras en este caso de longitudes 30 y 20 se apoyan en dos paredes opuestas, sabemos que el punto donde se encuentran estas dos paredes está a altura 8 y queremos saber la longitud del suelo.



El problema de las escaleras cruzadas fue desarrollado por Martin Garner en su libro "Circo matemático" (capítulo 5)

Este problema, en apariencia sencillo, conduce a una ecuación polinómica que necesita resolverse con métodos numéricos. Podéis ver en la Wikipedia un desarrollo de este problema que conduce a una ecuación polinómica de tercer grado. El siguiente desarrollo, no tan ambicioso, desemboca en una ecuación de grado sexto.

Sea a=AF, b=FB, c=AE, d=EB, e=BD y f=AC, de forma que la longitud buscada es AB = a+b



Por Pitágoras en ABC tenemos

(1) $(a+b)^2 + f^2 = 30^2$

Por Pitágoras en ABD tenemos

(2) $(a+b)^2 + e^2 = 20^2$

Los triángulos AFE y ABD son semejantes, por lo tanto

(3) $\frac{e}{20} = \frac{8}{c}$

Los triángulos ABC y FBE son semejantes, por lo tanto

(4) $\frac{f}{30} = \frac{8}{d}$

Por Pitágoras en AFE

(5) $a^2 + 8^2 = c^2$

Por Pitágoras en FBE

(6) $b^2 + 8^2 = d^2$

Construyendo la figura con regla y compás o con Geogebra podemos ver que el problema tiene solución y es única, por lo tanto las 6 ecuaciones anteriores forman un sistema no lineal con 6 incógnitas que entre otras muchas soluciones imaginarias y negativas también dará la única solución con valores reales y positivos que estamos buscamos.

De hecho si introducimos el sistema anterior en Mathematica:

```
NSolve[{
(a+b)^2+f^2==30^2,
(a+b)^2+e^2==20^2,
e/20==8/c,
f/30==8/d,
a^2+8^2==c^2,
b^2+8^2==d^2}
,{a,b,c,d,e,f}]
```

Entre un montón de soluciones posibles imaginarias y negativas aparece la buscada:

```
{a→11.074,b→5.13811,c→13.6614,d→9.5079,e→11.7118,f→25.2422}
```

$$\begin{cases} (a+b)^2 + f^2 = 30^2 \\ (a+b)^2 + e^2 = 20^2 \\ \dfrac{e}{20} = \dfrac{8}{c} \\ \dfrac{f}{30} = \dfrac{8}{d} \\ a^2 + 8^2 = c^2 \\ b^2 + 8^2 = d^2 \end{cases}$$

$$\frac{e}{20} = \frac{8}{c} \Rightarrow e = \frac{160}{c} \Rightarrow e^2 = \frac{160^2}{c^2} = \frac{160^2}{a^2 + 8^2}$$

$$\frac{f}{30} = \frac{8}{d} \Rightarrow f = \frac{240}{d} \Rightarrow f^2 = \frac{240^2}{d^2} = \frac{240^2}{b^2 + 8^2}$$

Por lo que las dos primeras ecuaciones quedan de la forma

$$\begin{cases} (a+b)^2 + \dfrac{240^2}{b^2 + 8^2} = 30^2 \\ (a+b)^2 + \dfrac{160^2}{a^2 + 8^2} = 20^2 \end{cases}$$

Un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Si a la primera fila le restamos la segunda obtenemos

$$\frac{240^2}{b^2 + 8^2} - \frac{160^2}{a^2 + 8^2} = 30^2 - 20^2$$

que simplificando queda

$$576b^2 = a^2\left(256 - 5b^2\right) \Rightarrow a^2 = \frac{576b^2}{256 - 5b^2} \Rightarrow a = \frac{24b}{\sqrt{256 - 5b^2}}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema obtenemos

$$\left(\frac{24b}{\sqrt{256 - 5b^2}} + b\right)^2 + \frac{160^2}{\dfrac{576b^2}{256 - 5b^2} + 8^2} = 20^2$$

Mathematica resuelve esta ecuación:

```
NSolve[(24b/Sqrt[256-5b^2]+b)^2+160^2/(576b^2/(256-
5b^2)+8^2)□20^2,b]

{{b→5.13811},{b→-5.13811},{b→0.},{b→0.}}
```

Podemos simplificarla un poco más:

$$\frac{576b^2}{256-5b^2}+8^2=\frac{576b^2+8^2(256-5b^2)}{256-5b^2}=\frac{256(b^2+64)}{256-5b^2}$$

$$\frac{160^2}{\frac{576b^2}{256-5b^2}+8^2}=\frac{160^2\left(256-5b^2\right)}{256(b^2+64)}=\frac{100\left(256-5b^2\right)}{b^2+64}$$

$$\frac{24b}{\sqrt{256-5b^2}}+b=\frac{24b+b\sqrt{256-5b^2}}{\sqrt{256-5b^2}}$$

$$\left(\frac{24b}{\sqrt{256-5b^2}}+b\right)^2=\left(\frac{24b+b\sqrt{256-5b^2}}{\sqrt{256-5b^2}}\right)^2=\frac{\left(24b+b\sqrt{256-5b^2}\right)^2}{256-5b^2}=\frac{b^2\left(24+\sqrt{256-5b^2}\right)^2}{256-5b^2}$$

La ecuación queda de la forma

$$\frac{b^2\left(24+\sqrt{256-5b^2}\right)^2}{256-5b^2}+\frac{100\left(256-5b^2\right)}{b^2+64}=20^2$$

Haciendo un cambio de variable $x=b^2$

$$\frac{x\left(24+\sqrt{256-5x}\right)^2}{256-5x}+\frac{100\left(256-5x\right)}{x+64}=20^2$$

Haciendo otro cambio de variable $u=256-5x\Rightarrow x=\frac{256-u}{5}$

$$\frac{\frac{256-u}{5}\left(24+\sqrt{u}\right)^2}{u}+\frac{100u}{\frac{256-u}{5}+64}=20^2$$

$$\frac{100u}{\frac{256-u}{5}+64}=\frac{500u}{576-u}$$

$$\frac{256-u}{5u}\left(24+\sqrt{u}\right)^2+\frac{500u}{576-u}=20^2$$

$$\frac{(256-u)\left(24+\sqrt{u}\right)^2}{5u}+\frac{500u}{576-u}=20^2$$

$$(256-u)\left(24+\sqrt{u}\right)^2(576-u)+2500u^2=20^2\cdot 5u\cdot(576-u)$$

$$(256-u)\left(24+\sqrt{u}\right)^2(576-u)+4500u^2=2000\cdot 576u^2$$

Por último, definiendo $v=\sqrt{u}\Rightarrow u=v^2$ llegamos a la ecuación

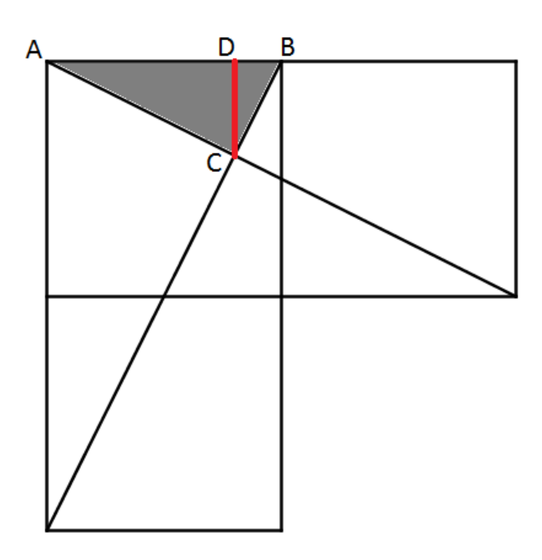
$$\left(256-v^2\right)(24+v)^2\left(576-v^2\right)+4500v^4=2000\cdot 576v^2$$

Una ecuación de sexto grado en v.

Mathematica determina, entre otras, la solución buscada v = 11.1355 y deshaciendo los cambios de variable llegamos a a = 11.074.

2.

Marcamos la perpendicular a AB que pasa por C, y sea D su punto de intersección con AB.



Entonces por semejanza de triángulos, $\frac{CD}{AD}=\frac{1}{2}$ y también $\frac{CD}{DB}=\frac{2}{1}$

Teniendo en cuenta que $AD+DB=1$, resolvemos el sistema de dos ecuaciones resultante:

$$\begin{cases} 2CD = AD \\ CD = 2BD \\ AD + DB = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2CD = 1 - DB \\ CD = 2BD \end{cases} \Rightarrow$$

$$2CD = 1 - \frac{CD}{2} \Rightarrow$$

$$4CD = 2 - CD$$

$$4CD + CD = 2$$

$$5CD = 2$$

$$CD = \frac{2}{5}$$

Y por tanto, $\acute{A}rea = \frac{CD \cdot AB}{2} = \frac{2/5 \cdot 1}{2} = \frac{1}{5}$

3.

$$2x^2 + 6x + 4 = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8 \Leftrightarrow$$
$$2x^2 + 6x + 4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$-2x^3 + 14x + 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

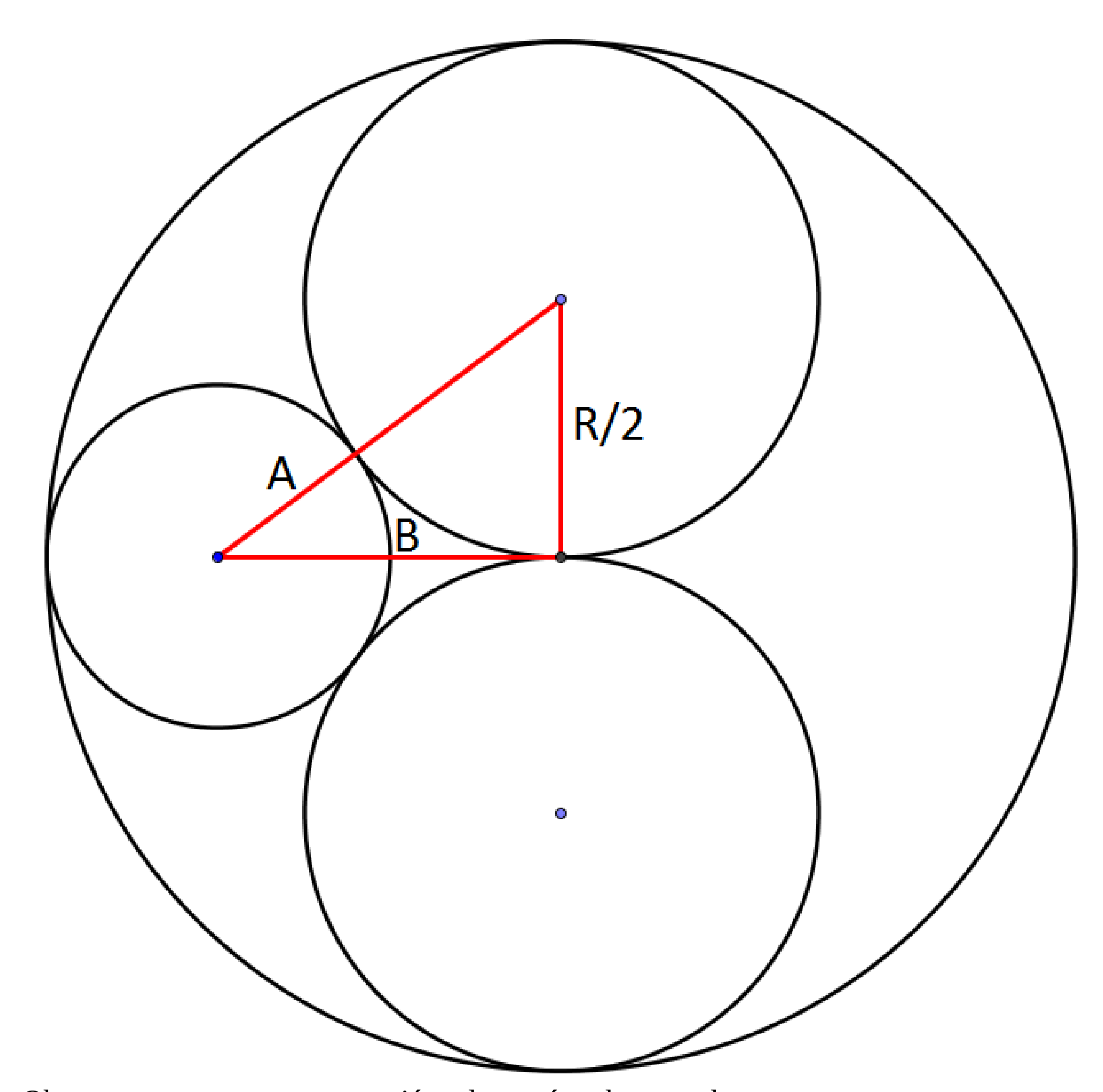
Por Ruffini:

	1	0	-7	-6
-1		-1	1	6
	1	-1	-6	
3		3	6	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Por tanto, las soluciones son -1, 3 i –2

4.

Calculamos el radio A de la circunferencia tangente a las dos interiores. Sea B la distancia del centro de la circunferencia mayor al centro de esta circunferencia.



Observamos que tenemos un triángulo rectángulo para el que

$$B^2 = \left(A + \frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Pero también se cumple $A + B = R$. Por lo tanto:

$$(R-A)^2 = \left(A+\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$R^2 - 2AR + A^2 = A^2 + AR + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

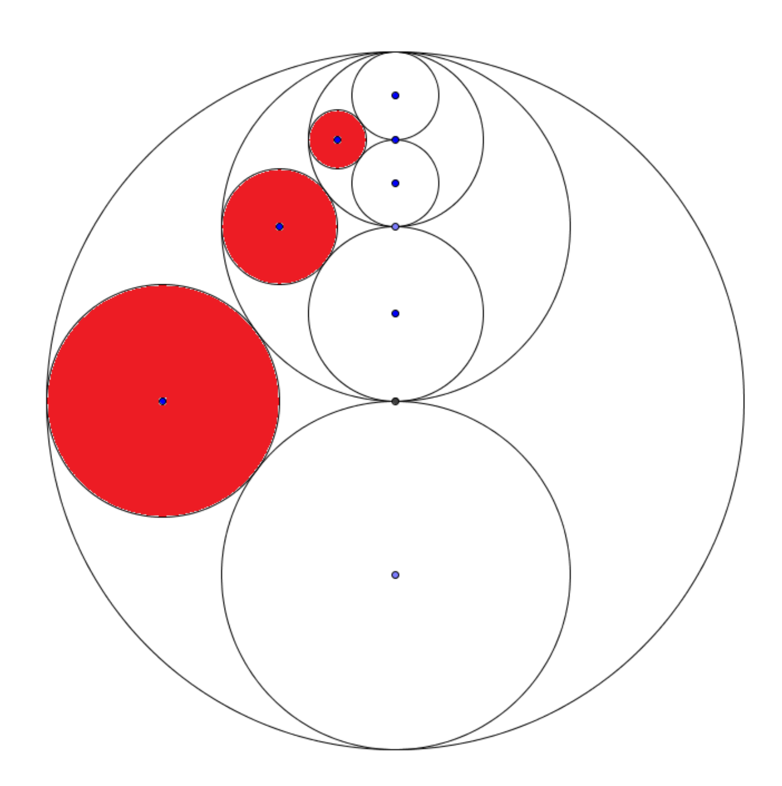
$$R^2 - 3AR = 0$$

$$R^2 = 3AR$$

$$R = 3A$$

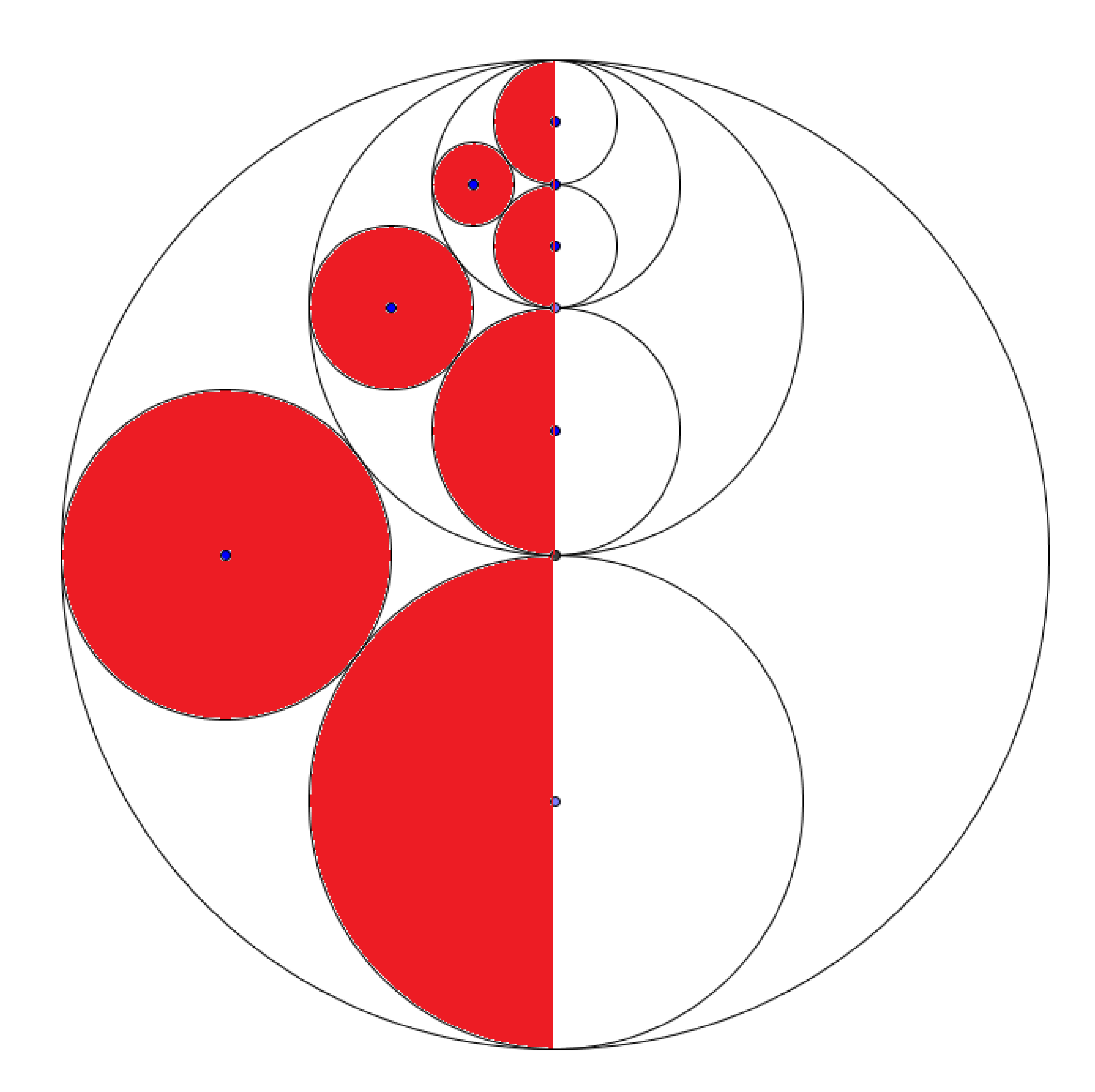
$$A = \frac{R}{3}$$

Así pues, las tres circunferencias tangentes tendrán radios R/3 , (R/2)/3=R/6 y (R/4)/3=R/12



Y su área será $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 + \pi\left(\frac{R}{6}\right)^2 + \pi\left(\frac{R}{12}\right)^2$

El área buscada será:



$$\frac{\pi R^2}{2}-\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2-\pi\left(\frac{R}{6}\right)^2-\pi\left(\frac{R}{12}\right)^2-\frac{\pi(R/2)^2}{2}-\frac{\pi(R/4)^2}{2}-\pi(R/8)^2=$$

$$=\frac{\pi R^2}{2}-\pi\frac{R^2}{9}-\pi\frac{R^2}{6^2}-\pi\frac{R^2}{12^2}-\pi\frac{R^2}{8}-\pi\frac{R^2}{32}-\pi\frac{R^2}{64}=$$

$$=\frac{\pi R^2}{2}-\pi\frac{R^2}{9}-\pi\frac{R^2}{6^2}-\pi\frac{R^2}{12^2}-\pi\frac{R^2}{8}-\pi\frac{R^2}{32}-\pi\frac{R^2}{64}=$$

$$=\pi R^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{12^2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)=$$

$$=\pi R^2\,\frac{35}{192}$$

5.

En el documento www.toomates.net/Llistes/a2014/set/circunferencias_tangentes1.doc encontrareis la explicación de la fórmula para el radio de las circunferencias tangentes inscritas que aparecen en el dibujo.

Estas circunferencias tienen como área la serie siguiente:

$$\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2+\pi\left(\frac{R/2}{3}\right)^2+\pi\left(\frac{R/4}{3}\right)^2+\pi\left(\frac{R/8}{3}\right)^2+\ldots=$$

$$=\frac{\pi R^2}{9}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\pi R^2}{9}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\pi R^2}{9}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\pi R^2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=*$$

Nos encontramos con una serie geométrica de razón 1/4:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}$$

Por lo tanto

$$*=\frac{\pi R^2}{9}\frac{4}{3}=\frac{4\pi R^2}{27}$$

De la misma manera los semicírculos blancos también tienen como área una serie geométrica:

$$\frac{\pi(R/2)^2}{2}+\frac{\pi(R/4)^2}{2}+\frac{\pi(R/8)^2}{2}+\frac{\pi(R/16)^2}{2}+\ldots=$$

$$=\frac{\pi R^2}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\pi R^2}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\pi R^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=**$$

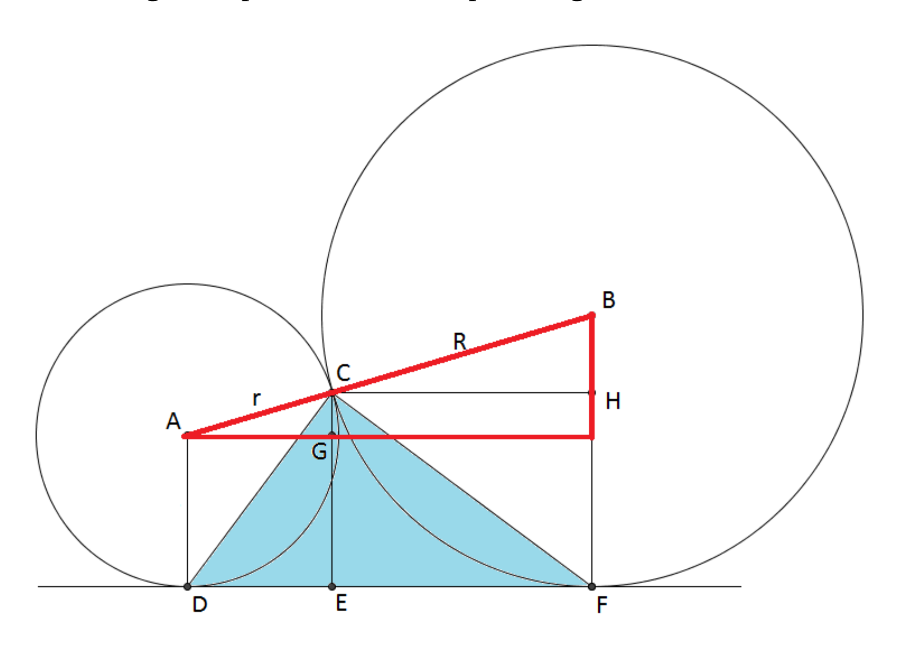
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{1/4}{1-1/4}=\frac{1}{3}$$

$$** = \frac{\pi R^2}{2}\frac{1}{3} = \frac{\pi R^2}{6}$$

Así pues, el área buscada será $\frac{\pi R^2}{2} - \frac{4\pi R^2}{27} - \frac{\pi R^2}{6} = \frac{5}{27}\pi R^2$

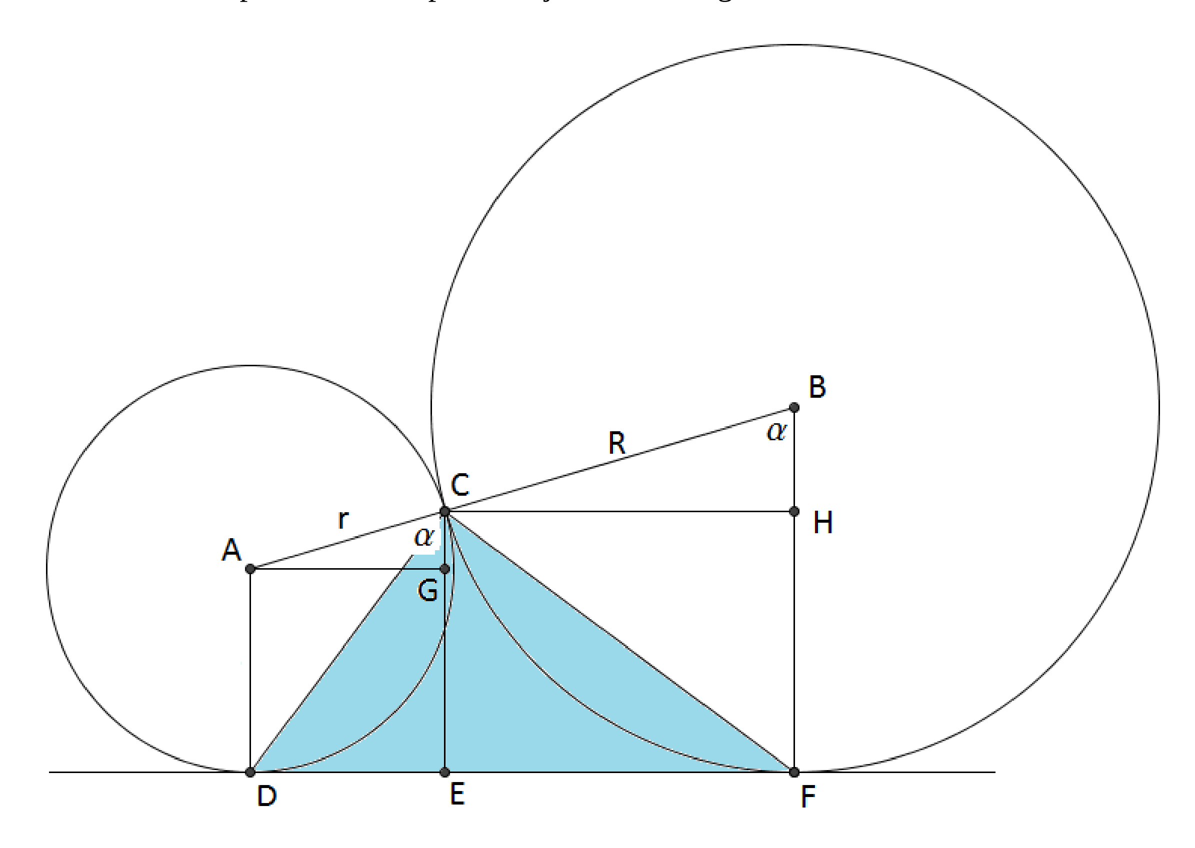
6.

La base DF del triángulo la podemos deducir por Pitágoras:



$$DF^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2 \Rightarrow$$
$$DF^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 \Rightarrow$$
$$DF^2 = R^2 + r^2 + 2rR - R^2.r^2 + 2rR = 4rR \Rightarrow$$
$$DF = 2\sqrt{rR}$$

La altura EC se puede deducir por semejanza de triángulos:



$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{BH}{R}\\ \cos\alpha &= \frac{CG}{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{BH}{R} = \frac{CG}{r} \Rightarrow r\cdot BH = R\cdot CG$$

Además

$$BH + CE = R \Rightarrow BH = R - CE$$
$$CG + r = CE \Rightarrow CG = CE - r$$

Por lo tanto

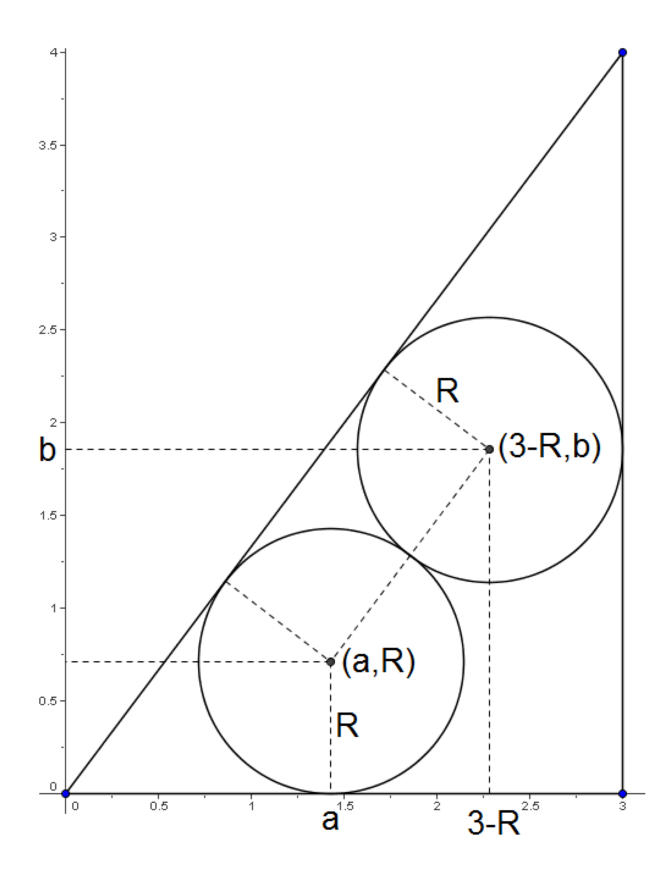
$$r(R - CE) = R(CE - r)$$
$$rR - r\cdot CE = R\cdot CE - Rr$$
$$2rR = R\cdot CE + r\cdot CE$$
$$2rR = CE(r + R)$$
$$\frac{2rR}{r+R} = CE$$

Finalmente,

$$Área = \frac{Base\cdot Altura}{2} = \frac{2\sqrt{rR}\cdot 2rR}{2(r+R)} = \frac{2\sqrt{(rR)^3}}{r+R}$$

7.

Desarrollamos este problema mediante geometría cartesiana:



La distancia entre los centros es de 2R, por lo tanto

(1) $(b-R)^2+(3-R-a)^2=(2R)^2$

El segmento que une los centros es paralelo a la hipotenusa:

(2) $\frac{4}{3}=\frac{b-R}{3-R-a}$

La distancia de los centros a la hipotenusa es R. Interpretando la hipotenusa como la recta $-4x+3y=0$, y aplicando la fórmula de distancia entre punto y recta:

(3) $$\frac{|-4a+3R|}{5}=R$$

El sistema (1) , (2) y (3) resuelve el problema planteado. Efectivamente, tomando (3)

$$\frac{|-4a+3R|}{5}=R \Leftrightarrow |-4a+3R|=5R \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+3R=5R & (3.1) \\ -4a+3R=-5R & (3.2) \end{cases}$$

Tomando ahora la seguna opción 3.2:

$$-4a+3R=-5R \Leftrightarrow$$
$$4a-3R=5R$$
$$4a=5R+3R$$
$$4a=8R$$
$$a=2R$$

Sustituyendo en (2)

$$\frac{4}{3}=\frac{b-R}{3-R-2R}=\frac{b-R}{3-3R}$$
$$4=\frac{b-R}{1-R}$$
$$4(1-R)=b-R$$
$$4-4R+R=b$$
$$4-3R=b$$

Por último substituyendo en (1)

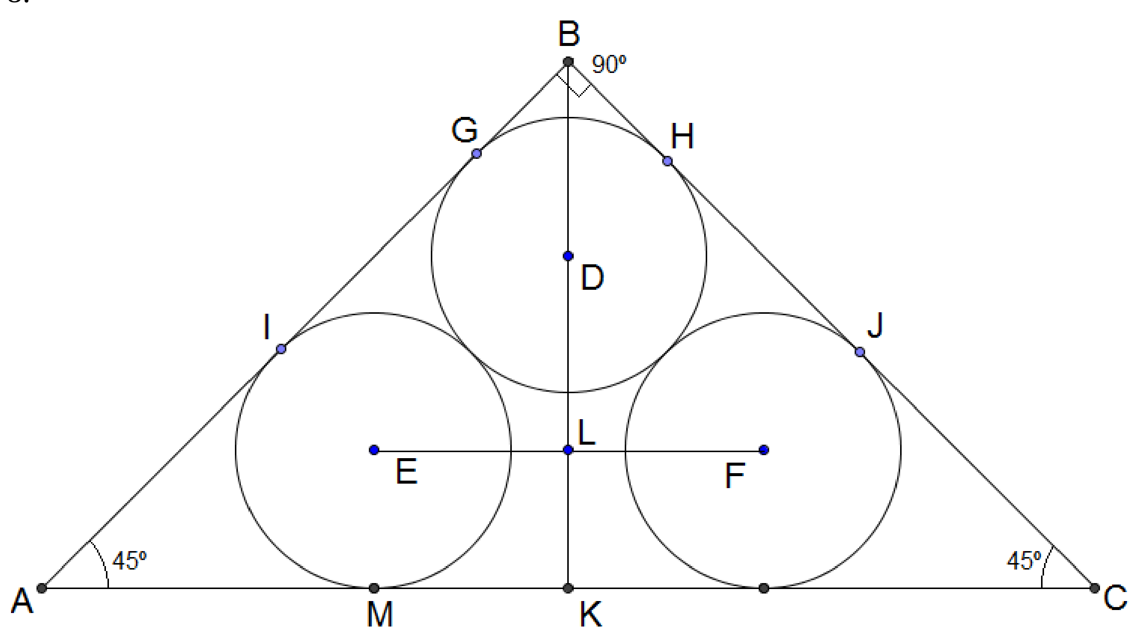
$$(4-3R-R)^2+(3-R-2R)^2=(2R)^2$$
$$(4-4R)^2+(3-3R)^2=(2R)^2$$
$$16-32R+16R^2+9-18R+9R^2=4R^2$$
$$25-50R+21R^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} R=5/7\cong 0.71 \\ R=5/3\cong 1.66 \end{cases}$$

Visualmente vemos que la solución 5/7 es la buscada.

Con la solución R = 5/3 tendríamos b = 4-3R = 4-5 = -1, valor no aceptable.

De la misma manera se comprueba que las soluciones utilizando (3.1) no son válidas.

8.



El ángulo HBD es de 45º por lo tanto DGB es un cuadrado de lado 1, y en consecuencia $DB = \sqrt{2}$

Sea K el punto de intersección entre AC y DB, y L el punto de intersección entre EF y BK.

$1 = \tan(45) = \frac{DL}{LF} \Rightarrow DL = LF$ y por Pitágoras $DL^2 + LF^2 = 2^2 \Rightarrow DL = \sqrt{2}$

Por último KL=1 ,por lo tanto $\mathrm{BK} = \mathrm{BD} + \mathrm{DL} + \mathrm{LK} = 2\sqrt{2} + 1$

$1 = \tan(45^\circ) = \frac{BK}{AK} \Rightarrow AK = BK = 2\sqrt{2} + 1$

MK=EL=LF= $\sqrt{2}$, por lo tanto $AM = AK - MK = 2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1$

$AI = AM$, por tanto $AB = AI + 2 + 1 = \sqrt{2} + 1 + 2 + 1 = \sqrt{2} + 4$

9.

Hem d'aplicar successivament la igualtat $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$:

$$\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=A^2=*$$

$$\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)=2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2=$$

$$4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=2-\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$*=\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=$$

$$=\left(2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=$$

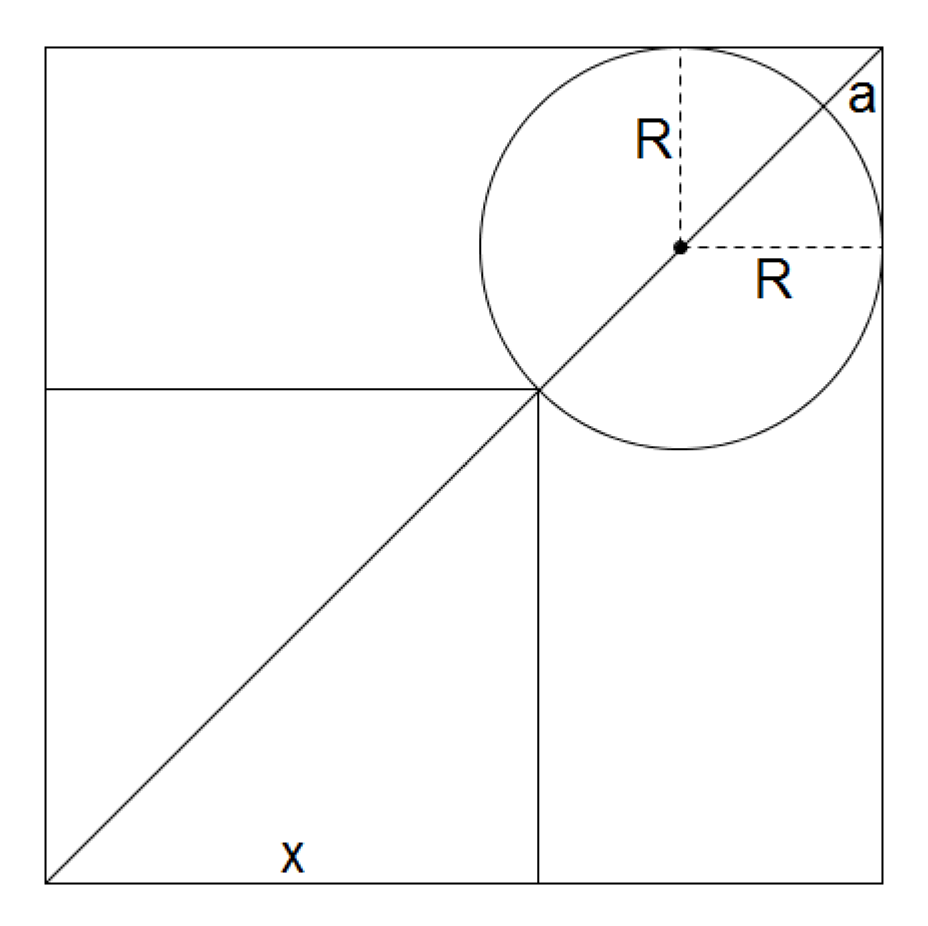
$$=\left(4-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=$$

$$=\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=$$

$$=2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=4-3=1$$

Per tant $A=\pm 1$, com que les arrels quadrades són sempre positives, el seu producte ha de ser positiu, i per tant $A=1$

10.



La diagonal del cuadrado interior mide $\sqrt{2}x$.
La longitud del segmento a se puede determinar por Pitágoras:

$$(R+a)^2 = 2R^2 \Rightarrow a = (\sqrt{2}-1)R$$

La diagonal del cuadrado grande mide $\sqrt{2}$
Por lo tanto

$$\sqrt{2}x + 2R + a = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}x + 2R + (\sqrt{2}-1)R = \sqrt{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}+1} = \frac{1-x}{1+1/\sqrt{2}} = \frac{1-x}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

11.

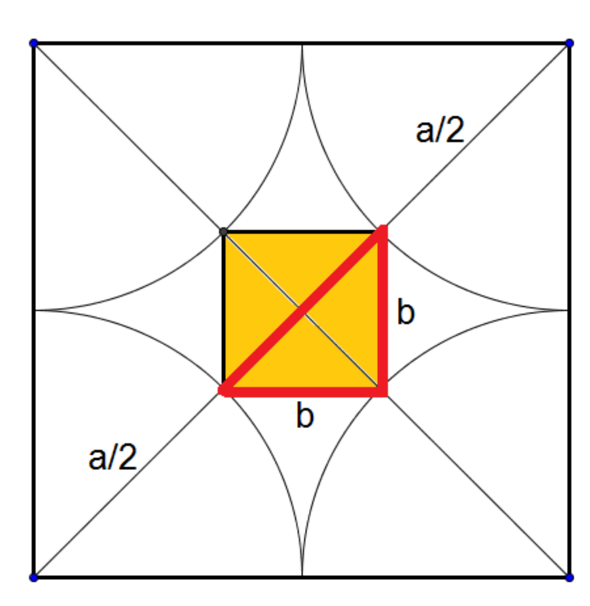
La diagonal del cuadrado grande es $\sqrt{2}a$, por lo tanto la diagonal del cuadrado pequeño es

$$\sqrt{2}a-2\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{2}a-a=\left(\sqrt{2}-1\right)a$$

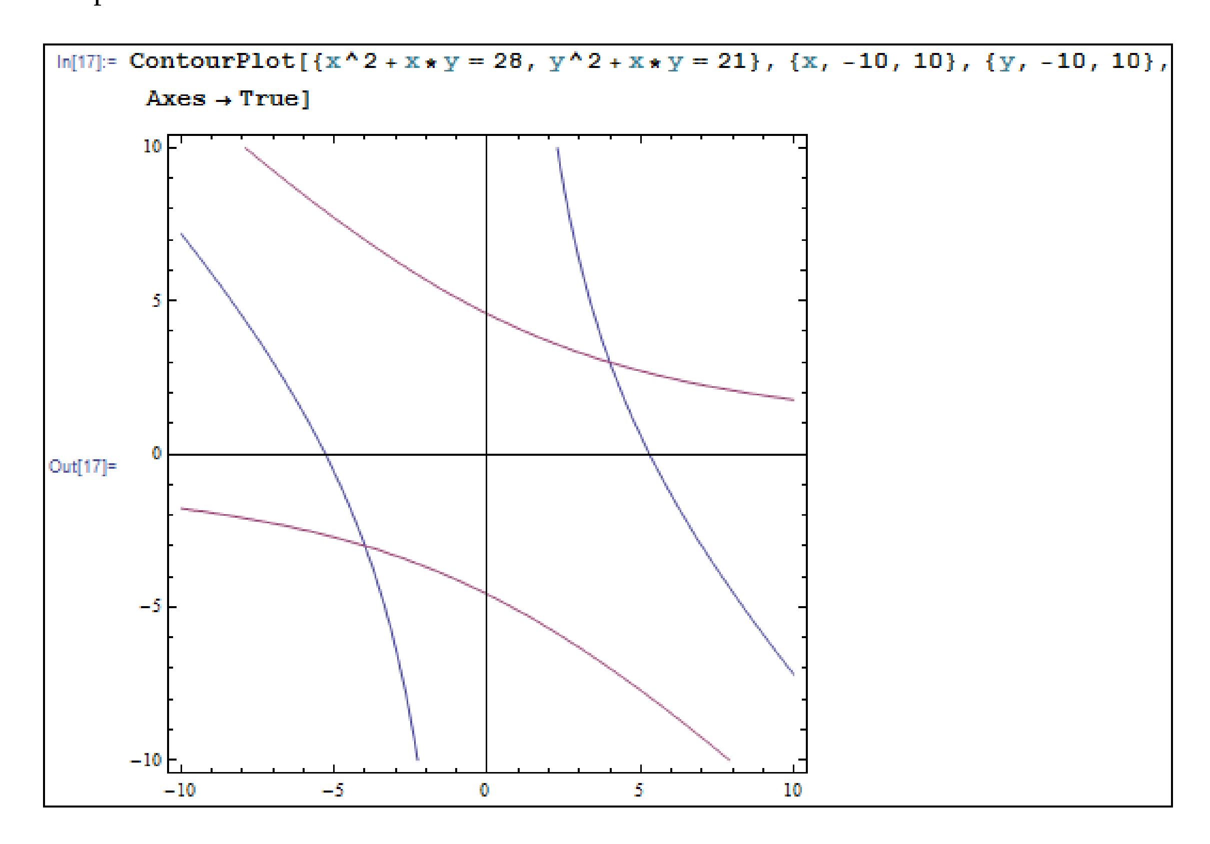
Por lo tanto, por Pitágonas,

$$b^2+b^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2a^2$$

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2}$$



12.
Visualizamos las dos gráficas con Mathematica. Esto nos pone sobre la pista de que hay dos posibles soluciones:



$$x^2 + xy = 28$$
$$x^2 + xy + xy + y^2 - xy - y^2 = 28$$
$$(x+y)^2 - xy - y^2 = 28$$
$$(x+y)^2 - (xy + y^2) = 28$$
$$(x+y)^2 - 21 = 28$$
$$(x+y)^2 = 28 + 21$$
$$(x+y)^2 = 49 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = -7 \end{cases}$$
$$Si \quad x + y = 7 \Rightarrow 28 = x(x+y) = x \cdot 7 \Rightarrow x = 4,\ y = 3$$
$$Si \quad x + y = -7 \Rightarrow 28 = x(x+y) = x \cdot (-7) \Rightarrow x = -4,\ y = -3$$

Las dos soluciones son x=4, y=3 i x=-4, y=-3

13.

Para el valor particular de $x=1$, la ecuación $f(f(x))=x$ es

$$f(1)=\frac{c}{5}$$

$$1=f(f(1))=\frac{c^2/5}{2\frac{c}{5}+3}=\frac{c^2}{2c+15}\Rightarrow c^2-2c-15=0\Rightarrow\begin{cases}c=-3\\ c=5\end{cases}$$

Para el valor particular de $x=2$, la ecuación $f(f(x))=x$ es

$$f(2)=\frac{2c}{7}$$

$$2=f(f(2))=\frac{2c^2/7}{4\frac{c}{7}+3}=\frac{2c^2}{4c+21}\Rightarrow 2c^2-8c-42=0\Rightarrow\begin{cases}c=-3\\ c=7\end{cases}$$

Por lo tanto el único valor válido es $c=-3$

Efectivamente, para $c=-3$

$$f(x)=\frac{-3x}{2x+3}$$

$$f(f(x))=\frac{-3\left(\frac{-3x}{2x+3}\right)}{2\left(\frac{-3x}{2x+3}\right)+3}=\frac{9x}{(2x+3)\left(\frac{-6x}{2x+3}+3\right)}=\frac{9x}{-6x+(2x+3)(3)}=$$

$$=\frac{9x}{-6x+6x+9}=\frac{9x}{x}=x$$

14.

En primer lugar estudiamos el dominio de definición de la ecuación:

La raíz $\sqrt{x-1}$ obliga a $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

La raíz $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}$ implica que $x+3-4\sqrt{x-1} \geq 0$

$$x+3-4\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow$$
$$x+3 \geq 4\sqrt{x-1} \Rightarrow$$
$$(x+3)^2 \geq \left(4\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow$$
$$x^2+6x+9 \geq 16(x-1) \Rightarrow$$
$$x^2+6x+9 \geq 16x-16 \Rightarrow$$
$$x^2+6x+9-16x+16 \geq 0 \Rightarrow$$
$$x^2-10x+25 \geq 0 \Rightarrow$$
$$(x-5)^2 \geq 0 \quad \textit{siempre}$$

De la misma manera se comprueba que la raíz $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ implica
$x+8-6\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow (x-10)^2 \geq 0 \quad \textit{siempre}$

Resolvemos la ecuación:

$$x+3-4\sqrt{x-1} = x-1+4-4\sqrt{x-1} =$$
$$= \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 2^2 - 2\cdot 2\sqrt{x-1} =$$
$$= \left(\sqrt{x-1}-2\right)^2$$
$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2} = \left|\sqrt{x-1}-2\right|$$

De la misma manera

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2} = \left|\sqrt{x-1}-3\right|$$

Por lo tanto
$$1 = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} =$$
$$= \left|\sqrt{x-1}-2\right| + \left|\sqrt{x-1}-3\right|$$

Estudiamos los diferentes casos, que dependen del signo del interior de los valores absolutos:

Caso 1: $\sqrt{x-1}-2\geq 0 \quad y \quad \sqrt{x-1}-3\geq 0$

$\sqrt{x-1}-2\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}\geq 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \geq 2^2 \Rightarrow x-1\geq 4 \Rightarrow x\geq 5$
$\sqrt{x-1}-3\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}\geq 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \geq 3^2 \Rightarrow x-1\geq 9 \Rightarrow x\geq 10$
Por tanto $x\geq 10$
$1=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=2\sqrt{x-1}-5$

$1=2\sqrt{x-1}-5$

$6=2\sqrt{x-1}$

$3=\frac{6}{2}=\sqrt{x-1}$

$9=x-1$

$10=x$

Caso 2: $\sqrt{x-1}-2\leq 0 \quad y \quad \sqrt{x-1}-3\leq 0$

$\sqrt{x-1}-2\leq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}\leq 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \leq 2^2 \Rightarrow x-1\leq 4 \Rightarrow x\leq 5$
$\sqrt{x-1}-3\leq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}\leq 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \leq 3^2 \Rightarrow x-1\leq 9 \Rightarrow x\leq 10$

Por tanto $x\leq 5$

$1=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=-\left(\sqrt{x-1}-2\right)+-\left(\sqrt{x-1}-3\right)=$

$=2-\sqrt{x-1}+3-\sqrt{x-1}=$

$=5-2\sqrt{x-1}$

$1=5-2\sqrt{x-1}$

$2\sqrt{x-1}=5-1$

$2\sqrt{x-1}=4$

$\sqrt{x-1}=4/2=2$

$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=2^2$

$x-1=4$

$x=5$

Caso 3: $\sqrt{x-1}-2\geq 0 \quad y \quad \sqrt{x-1}-3\leq 0$

$\sqrt{x-1}-2\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}\geq 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \geq 2^2 \Rightarrow x-1\geq 4 \Rightarrow x\geq 5$
$\sqrt{x-1}-3\leq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1}\leq 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \leq 3^2 \Rightarrow x-1\leq 9 \Rightarrow x\leq 10$

El intervalo de estudio es $[5,10]$

$$1=\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=\sqrt{x-1}-2+-\left(\sqrt{x-1}-3\right)=$$
$$=\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}=$$
$$=1$$
$$1=1$$

La ecuación se satisface para todos los valores de $x\in[5,10]$

Caso 4: $\sqrt{x-1}-2\leq 0 \quad y \quad \sqrt{x-1}-3\geq 0$

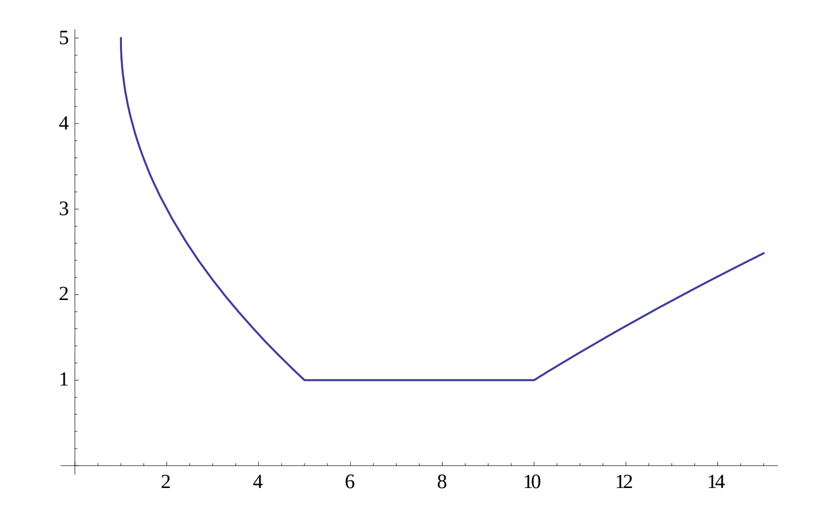
$$\sqrt{x-1}-2\leq 0\Rightarrow \sqrt{x-1}\leq 2\Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2\leq 2^2\Rightarrow x-1\leq 4\Rightarrow x\leq 5$$
$$\sqrt{x-1}-3\geq 0\Rightarrow \sqrt{x-1}\geq 3\Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2\geq 3^2\Rightarrow x-1\geq 9\Rightarrow x\geq 10$$

No hay valores de x que satisfagan estas dos condiciones.

Por lo tanto las soluciones de la ecuación son todos los valores de x entre 5 y 10:

$x\in[5,10]$

La función $f(x)=\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$ es un caso de función constante en un intérvalo:



15.

Racionalizamos cada elemento:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{1}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}=\sqrt{2}-\sqrt{1}$$

De la misma manera vemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Y en general

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

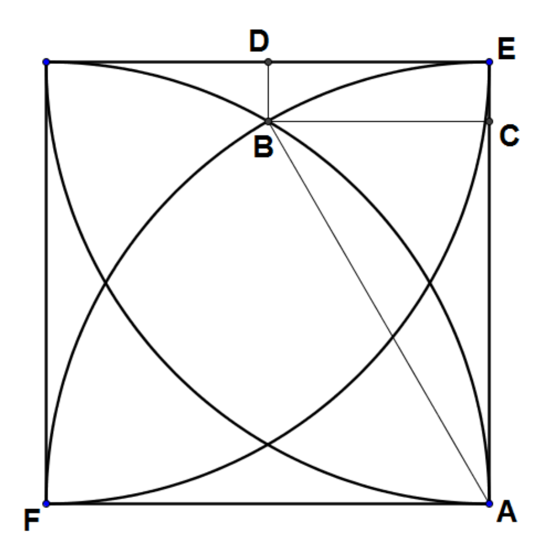
Así pues la suma nos queda de la siguiente manera:

$$k_n=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots=$$
$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\ldots=$$
$$=\sqrt{k}-\sqrt{1}=\sqrt{k}-1$$

Así pues necesitamos que

$$\sqrt{k}-1=1000$$
$$\sqrt{k}=1000-1$$
$$\sqrt{k}=999$$
$$k=999^2$$

16.

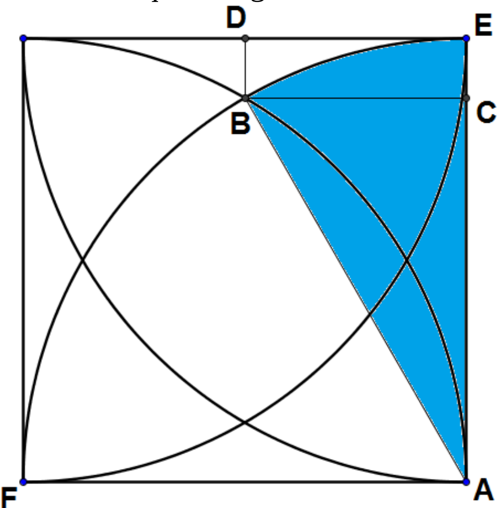


$AB=1,\; CB=\frac{1}{2}$, por lo tanto, por Pitágoras $AC=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y el triángulo ABC tiene área $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

El rectángulo BCDE tiene área $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}$

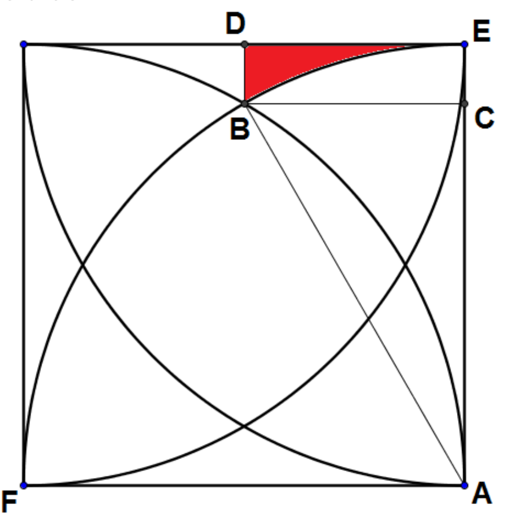
Por lo tanto el cuadrilátero AEDB tiene área $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

El triángulo ABE es equilátero, por lo tanto tiene ángulos de 60º, por lo tanto el ángulo CAB es de 30º. De aquí deducimos que el siguiente sector circular tiene área:



$\frac{30}{360}\pi r^2=\frac{30}{360}\pi 1^2=\frac{\pi}{12}$

Por lo tanto el área roja será de



$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{12}$$

y el área de la figura será

$$1-8\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{12}\right)=1-4+\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}-3$$

17.

Aplicaremos de forma sistemática las identidades $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ y $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow a = b^3$

Para resolver la ecuación

$$\sqrt[3]{1729-x}+\sqrt[3]{x}=19$$

Elevamos al cubo y aplicamos la fórmula $(a+b)^3 = a^3+b^3+2a^2b+2ab^2$

$$\left(\sqrt[3]{1729-x}+\sqrt[3]{x}\right)^3=19^3$$
$$\left(\sqrt[3]{1729-x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{1729-x}\right)^2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{1729-x}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=19^3$$
$$1729-x+x+3\sqrt[3]{(1729-x)^2x}+3\sqrt[3]{(1729-x)x^2}=19^3$$
$$3\sqrt[3]{(1729-x)^2x}+3\sqrt[3]{(1729-x)x^2}=19^3-1729=5130$$
$$\sqrt[3]{(1729-x)^2x}+\sqrt[3]{(1729-x)x^2}=1710 \quad (*)$$

Volvemos a elevar al cubo y volvemos a aplicar la misma fórmula:

$$(1729-x)^2x+(1729-x)x^2+3\sqrt[3]{\left((1729-x)^2x\right)^2(1729-x)x^2}+$$
$$+3\sqrt[3]{(1729-x)^2x\left((1729-x)x^2\right)^2}=1710^3 \quad (**)$$

Simplificamos cada sumando:

$$(1729-x)^2x+(1729-x)x^2=(1729-x)x(1729-x+x)=1729x(1729-x)$$

$$\sqrt[3]{\left((1729-x)^2x\right)^2(1729-x)x^2}=$$
$$=\sqrt[3]{(1729-x)^4x^2(1729-x)x^2}=$$
$$=\sqrt[3]{(1729-x)^4x^2(1729-x)x^2}=$$
$$=\sqrt[3]{(1729-x)^5x^4}=$$
$$=(1729-x)\cdot x\cdot\sqrt[3]{(1729-x)^2x}$$

$$\sqrt[3]{(1729-x)^2x\left((1729-x)x^2\right)^2}=$$
$$=\sqrt[3]{(1729-x)^2x(1729-x)^2x^4}=$$
$$=\sqrt[3]{(1729-x)^4x^5}=$$
$$=(1729-x)\cdot x\cdot\sqrt[3]{(1729-x)x^2}$$

La ecuación queda de la forma:

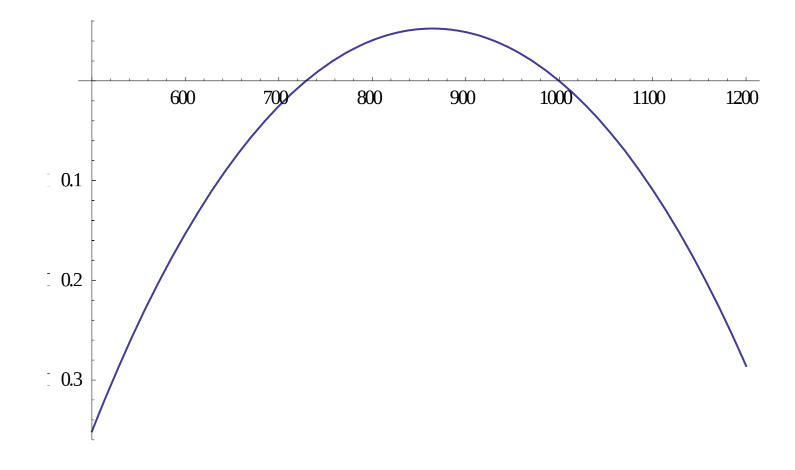
$$1729x(1729-x)+3(1729-x)\cdot x\cdot\sqrt[3]{(1729-x)^2 x}+$$
$$+3(1729-x)\cdot x\cdot\sqrt[3]{(1729-x)x^2}=1710^3 \Leftrightarrow$$
$$x(1729-x)\left(1729+3\left(\sqrt[3]{(1729-x)^2 x}+\sqrt[3]{(1729-x)x^2}\right)\right)=1710^3$$

Pero el interior del paréntesis interno es 1710 por (*) , así pues

$$x(1729-x)(1729+3(1710))=1710^3$$
$$x(1729-x)\cdot 6859=1710^3$$
$$x(1729-x)=729000 \Leftrightarrow \begin{cases} x=729 \\ x=1000 \end{cases}$$

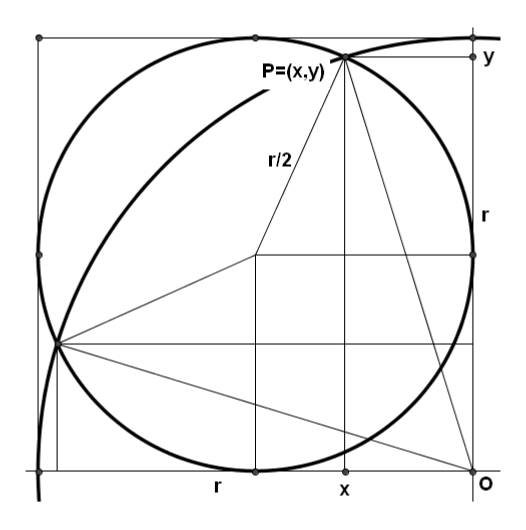
Las soluciones son por tanto x = 729 y x = 1000

La gráfica de la función $f(x)=\sqrt[3]{1729-x}+\sqrt[3]{x}-19$ tiene la siguiente forma:



18.

Resolveremos este problema con geometría cartesiana:



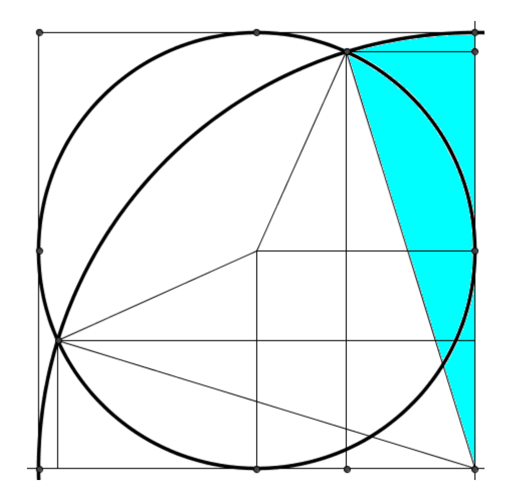
El punto P es la intersección de las dos circunferencias, por lo tanto es una de las dos soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ (x+r/2)^2+(y-r/2)^2=(r/2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-5-\sqrt{7}}{8}r\ ,\ y=\dfrac{5-\sqrt{7}}{8}r \\ x=\dfrac{-5+\sqrt{7}}{8}r\ ,\ y=\dfrac{5+\sqrt{7}}{8}r \end{cases}$$

Por tanto $$P=\left(\frac{\sqrt{7}-5}{8}r,\frac{\sqrt{7}+5}{8}r\right)\cong(-0.294r\,,0.956r)$$

Definimos $b=-x=\dfrac{5-\sqrt{7}}{8}r\cong 0.294r$ y $a=y=\dfrac{5+\sqrt{7}}{8}r\cong 0.956r$

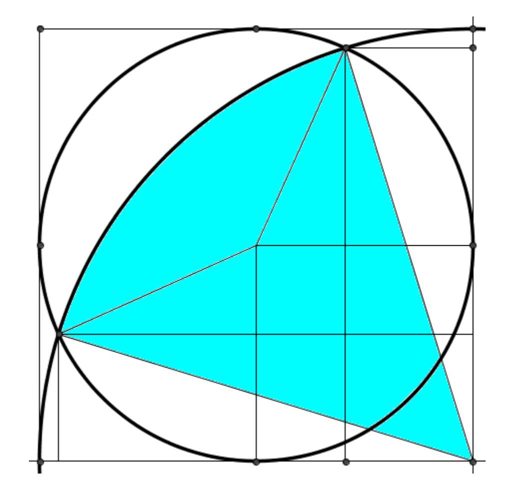
El sector circular siguiente



tiene una amplitud de

$$\alpha = \arctan(b/a) = \arctan\left(\frac{(5-\sqrt{7})r/8}{(5+\sqrt{7})r/8}\right) = \arctan\left(\frac{5-\sqrt{7}}{5+\sqrt{7}}\right) \cong 17.1144^{o}$$

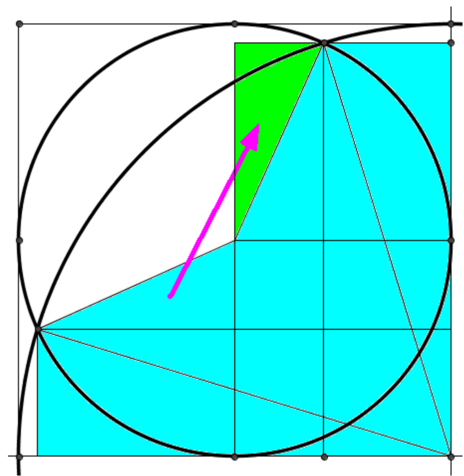
Por lo tanto el sector circular siguiente tiene una amplitud



$$\beta = 90 - 2\alpha = 90 - 2\cdot 17.1144 = 55.7712^{o}$$

y su área es de $A_1 = \frac{55.7712}{360}\pi r^2 = 0.4867\, r^2$

Para calcular el siguiente área azul vemos que se puede descomponer en dos rectángulos:

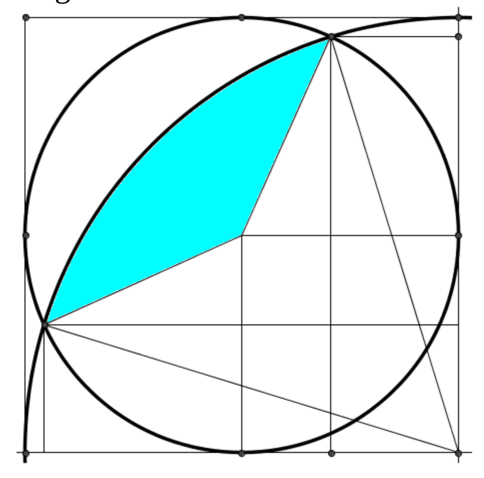


$$A_2 = a\cdot b + \frac{r}{2}\cdot(a-b)$$

Por lo tanto el área la podemos escribir como

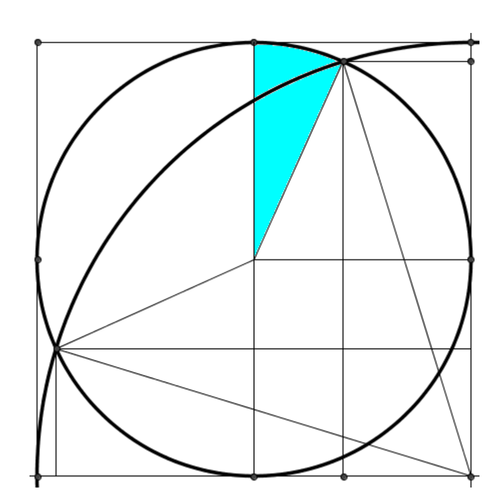
$$A_3 = A_2 - a \cdot b = \frac{r}{2}(a-b) = \frac{\sqrt{7}}{8} r^2$$

Y así el área de la siguiente figura será



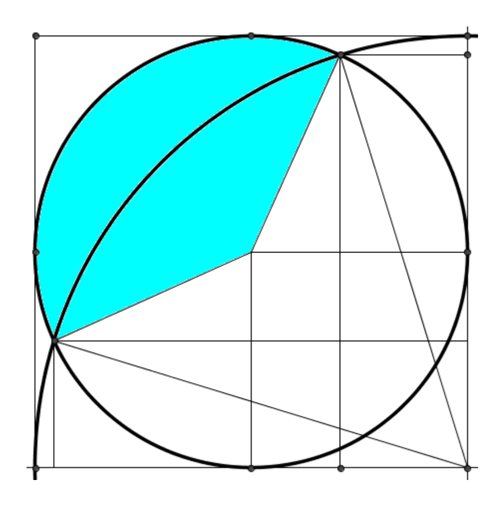
$$A_3 = A_1 - A_2 = \frac{55.7712}{360}\pi r^2 - \frac{\sqrt{7}}{8} r^2 = \left(\frac{55.7712}{360}\pi - \frac{\sqrt{7}}{8}\right) r^2 \cong 0.1560\, r^2$$

El sector circular siguiente tiene amplitud



$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{r/2 - b}{a - r/2}\right) = \arctan\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cong 24.5952^{\circ}$$

Por lo tanto el sector circular siguiente

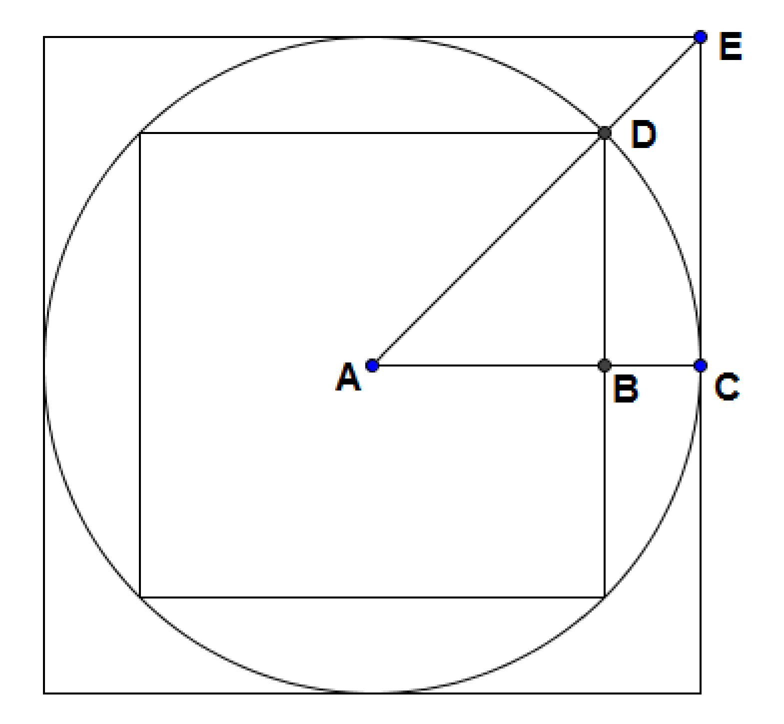


tiene una amplitud de $\alpha_4 = 90 + 2\alpha_3 \cong 138.59$

y un área de $A_4 = \frac{138.59}{360}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cong 0.3024r^2$

Por último, el área buscada será $A_5 = A_4 - A_3 = 0.3024r^2 - 0.1560r^2 = 0.1464r^2$

19.



$AC = AD = 1/2$
$AB = BD$

Por Pitágoras en ABD

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = 2AB^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2AB^2$$

$$\frac{1}{4} = 2AB^2$$

$$\frac{1}{8} = AB^2$$

$$\sqrt{\frac{1}{8}} = AB$$

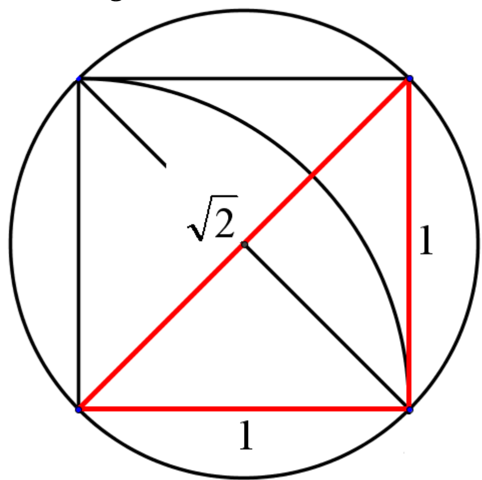
$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = AB$$

Por lo tanto el cuadrado interior tiene lados de longitud $2\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y un área de

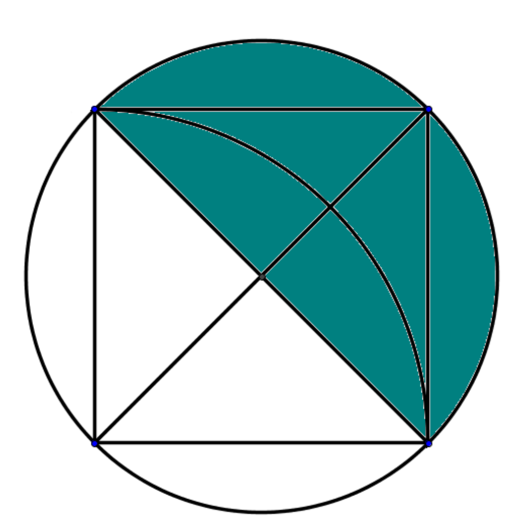
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

20.

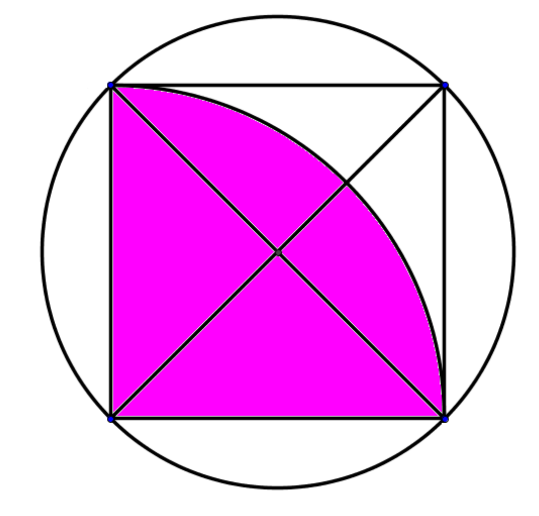
Por Pitágoras la circunferencia externa tiene diametro $\sqrt{2}$.



Por lo tanto $A_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\frac{2}{4} = \frac{\pi}{4}$



$A_2 = \frac{1}{4}\pi 1^2 = \frac{\pi}{4}$



$A_3 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

Y el área buscada es $A = A_1 - (A_2 - A_3) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

21.

Sea a el radio de la circunferencia A.

La circunferencia D tiene por ecuación

$$(x-15a)^2 + y^2 = (4a)^2$$

Sabemos que contiene el punto $(63,16)$ por lo tanto

$$(63-15a)^2 + 16^2 = (4a)^2 \Rightarrow$$
$$63^2 - 2\cdot 63\cdot 15a + (15a)^2 + 16^2 = 16a^2 \Rightarrow$$
$$3969 - 1890a + 225a^2 + 256 = 16a^2 \Rightarrow$$
$$209a^2 - 1890a + 4225 = 0 \Rightarrow$$
$$a = \frac{1890 \pm \sqrt{(-1890)^2 - 4\cdot 209\cdot 4225}}{2\cdot 209} = \frac{1890 \pm \sqrt{40000}}{418} = \begin{cases} 5 \\ 845/209 \end{cases}$$

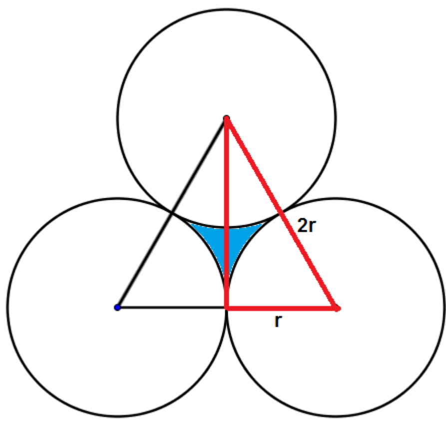
Puesto que sabemos que los radios son enteros, la única solución aceptable es a=5

Por lo tanto la circunferencia B tiene como ecuación

$$(x-3a)^2 + y^2 = (2a)^2$$
$$(x-15)^2 + y^2 = 100$$

22.

Por Pitágoras calculamos la altura del triángulo central:

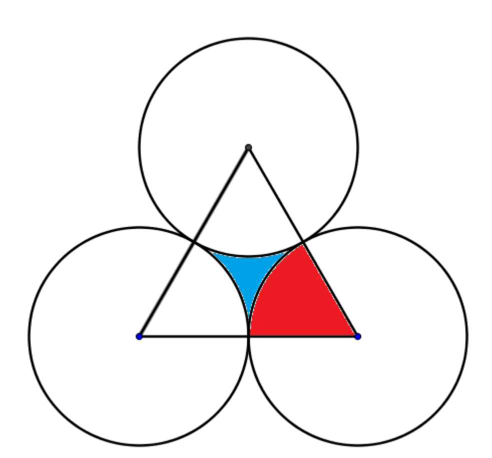


$$a=\sqrt{(2r)^2-r^2}=\sqrt{4r^2-r^2}=\sqrt{3r^2}=\sqrt{3}r$$

El triángulo central tiene sus tres lados iguales por lo tanto es equilátero. Su área es:

$$A_1=\frac{2r\sqrt{3}r}{2}=\sqrt{3}r^2$$

Y al ser equilátero sus ángulos son de 60º. Por lo tanto cada sector circular determinado por cada vértice tiene área



$$A_2=\frac{60}{360}\pi r^2=\frac{\pi r^2}{6}$$

Y así pues el área buscada es:

$$A=A_1-3A_2=\sqrt{3}r^2-\frac{\pi r^2}{2}=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)r^2\cong 0.16r^2$$

23.

Resolveremos este problema utilizando la siguiente propiedad:

Si un polinomio con coeficientes enteros $f(x)$ tiene una raíz impar, entonces la suma de sus coeficientes es par.

Efectivamente, si p es impar se puede escribir de la forma $p = 2k + 1$ para cierto natural k. Entonces todas sus potencias p^n se pueden escribir de la forma $p^n = par + 1$, sólo hay que desarrollar la potencia p^n por el binomio de Newton:

$$p^n = (2k+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} (2k)^j 1^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} 2^j k^j = 1 + \sum_{j=1}^{n} \binom{j}{n} 2^j k^j$$

y claramente el segundo sumando $\sum_{j=1}^{n} \binom{j}{n} 2^j k^j$ es múltiple de 2.

Ahora si $f(x) = a_1 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= f(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = \\
&= a_n (par_n + 1) + a_{n-1} (par_{n-1} + 1) + ... + a_1 (par_1 + 1) + a_0 = \\
&= a_n par_n + a_n 1 + a_{n-1} par_{n-1} + a_{n-1} 1 + ... + a_1 par_1 + a_1 + a_0 = \\
&= a_n par_n + a_{n-1} par_{n-1} + ... + a_1 par_1 + a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = -(a_n par_n + a_{n-1} par_{n-1} + ... + a_1 par_1)
\end{aligned}$$

El producto de cualquier número por un número par es par, y la suma de números pares es par, por lo tanto vemos que $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ es par.

Demostremos ahora el enunciado del problema:

Sea f(x) es un polinomio con coeficientes enteros y supongamos que p es una raíz de f(x):

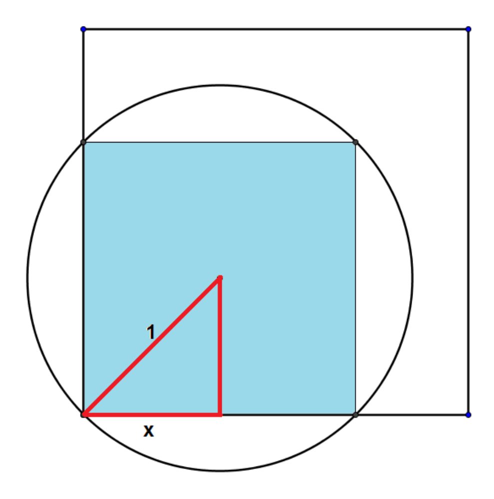
$$\begin{aligned}
0 &= f(p) = a_1 p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow a_0 = -(a_1 p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p) = -p(a_1 p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + ... + a_1)
\end{aligned}$$

Puesto que a_0 es impar, entonces p tiene que ser impar, puesto que un número par por cualquier número es par, y aplicando el resultado anterior llegamos a la conclusión que la suma de coeficientes es par, contradiciendo la hipótesis del enunciado.

24.

El círculo tiene radio 1, por lo tanto tiene área $\pi \cdot 1^2 = \pi$

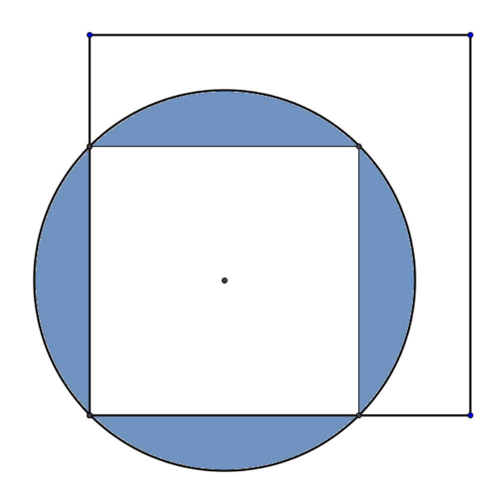
Calculamos el lado del cuadrado interior por Pitágoras:



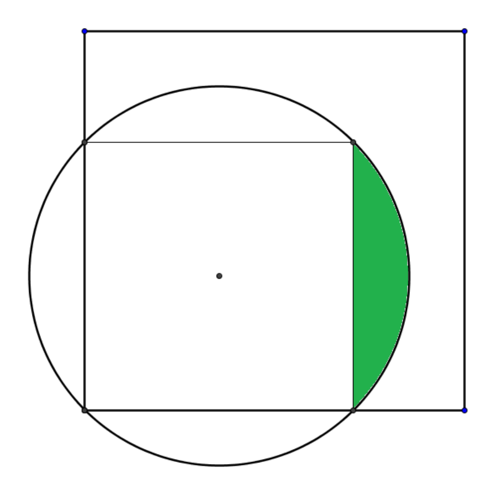
$$1^2 = x^2 + x^2$$
$$1 = 2x^2$$
$$\frac{1}{2} = x^2$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = x$$

Por lo tanto tiene lado $2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ y su área es $A_1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Así pues, el área de la zona complementaria:



es $\pi - 2$ y por tanto el área de cada una de las zonas verdes es $A_2 = \frac{\pi - 2}{4}$

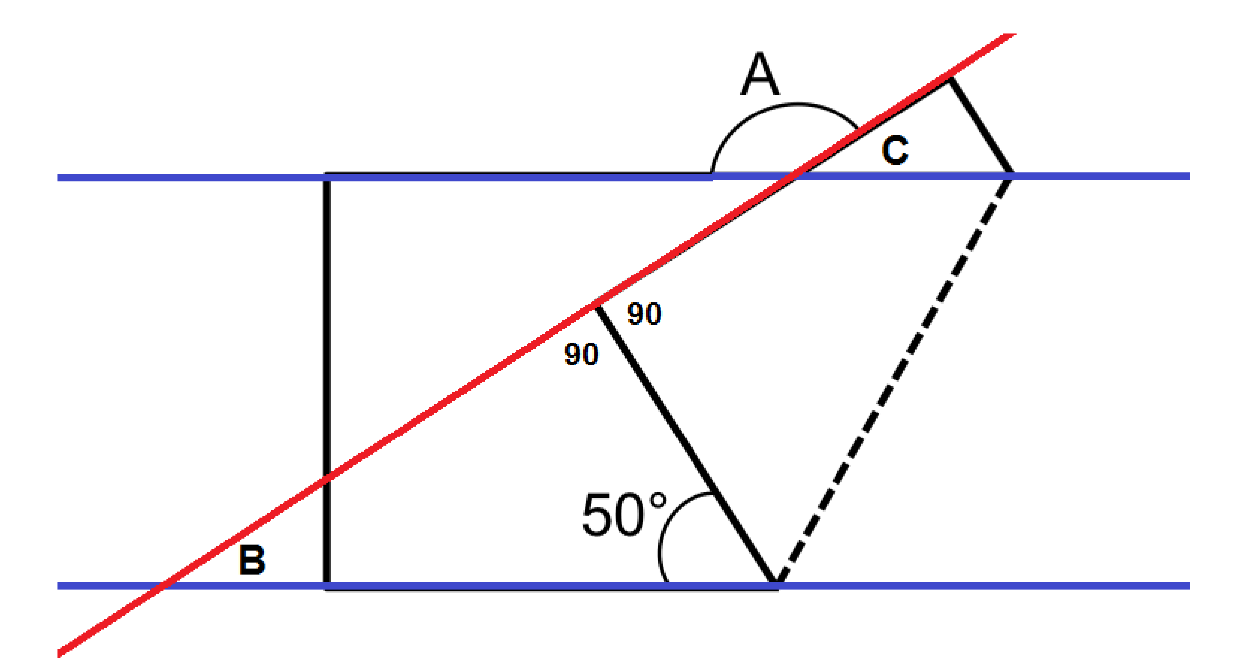


El área del cuadrado grande es claramente $A_3 = 2^2 = 4$, y por lo tanto el área buscada es

$$A = A_3 - A_1 - 2A_2 = 4 - 2 - 2\frac{\pi - 2}{4} = 2 - \frac{\pi - 2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{\pi - 2}{2} =$$

$$= \frac{4 - (\pi - 2)}{2} = \frac{4 - \pi + 2}{2} = \frac{6 - \pi}{2} = 3 - \frac{\pi}{2} \approx 1.4292$$

25.



$B = 180 - 50 - 90 = 40$

Por paralelismo $C = B = 40$

Y por tanto $A = 180 - C = 180 - 40 = 140$

26.

Aplicando la propiedad trigonométrica $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$$A = \sum_{k=1}^{360} \sin^2(k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{360} \frac{1-\cos(2k)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{360} 1-\cos(2k) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(360 - \sum_{k=1}^{360}\cos(2k)\right) = *$$

Ahora aplicamos la propiedad $\cos(x) = \cos(x+360)$

$$\sum_{k=1}^{360}\cos(2k) = \sum_{k=1}^{180}\cos(2k) + \sum_{k=181}^{360}\cos(2k)$$
$$= \sum_{k=1}^{180}\cos(2k) + \sum_{k=1}^{180}\cos(2(k+180)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{180}\cos(2k) + \sum_{k=1}^{180}\cos(2k+360) =$$
$$= \sum_{k=1}^{180}\cos(2k) + \sum_{k=1}^{180}\cos(2k) =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{180}\cos(2k) = **$$

Aplicando la propiedad $\cos(x) = -\cos(x+180)$

$$\sum_{k=1}^{180}\cos(2k) = \sum_{k=1}^{90}\cos(2k) + \sum_{k=91}^{180}\cos(2k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{90}\cos(2k) + \sum_{k=1}^{90}\cos(2(k+90)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{90}\cos(2k) + \sum_{k=1}^{90}\cos(2k+180) =$$
$$= \sum_{k=1}^{90}\left(\cos(2k) + \cos(2k+180)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{90}\left(\cos(2k) - \cos(2k)\right) = \sum_{k=1}^{90} 0 = 0$$

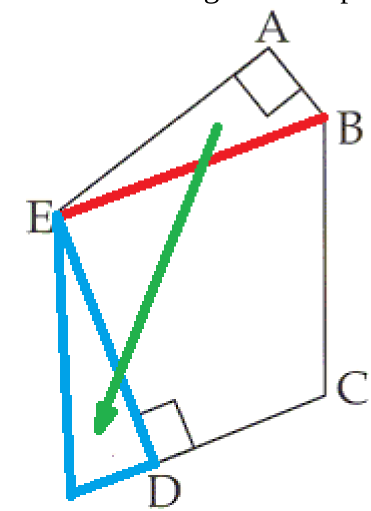
Por lo tanto $** = 2\cdot 0 = 0$

Y por último seguimos en (*) : $A = \frac{1}{2}\left(360-0\right) = 180$

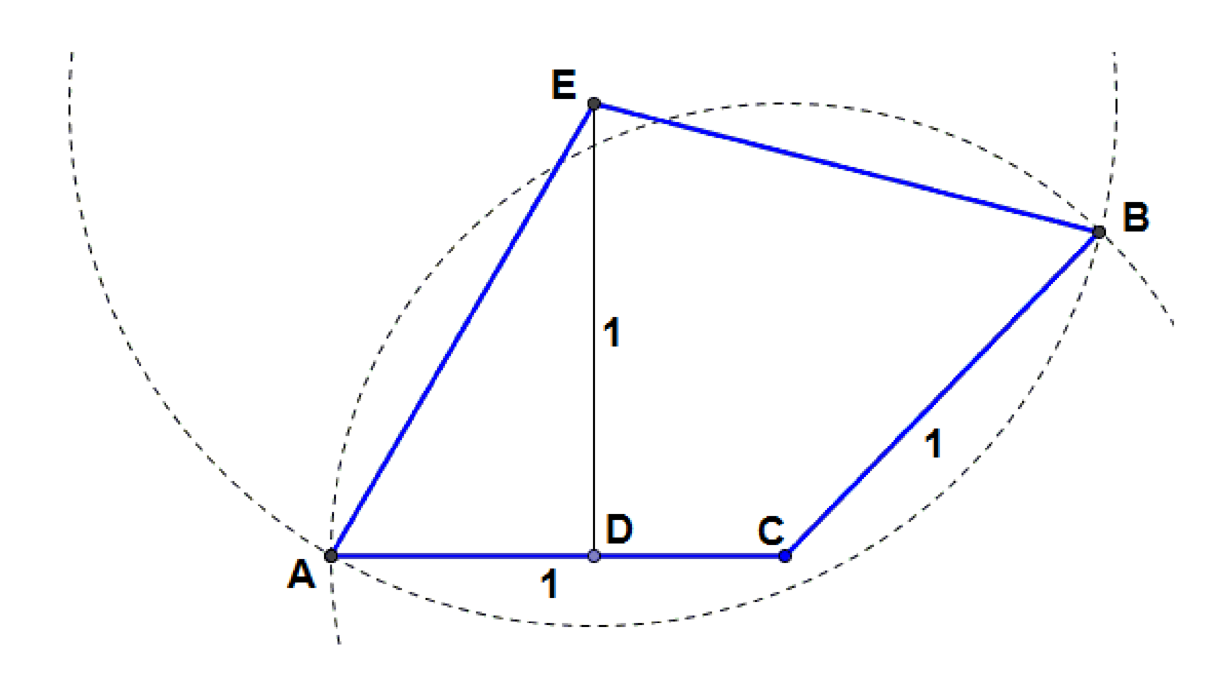
Nota: Podéis ver una solución más sencilla en:
http://nomolestesmiscirculos.hol.es/?p=3547

27.

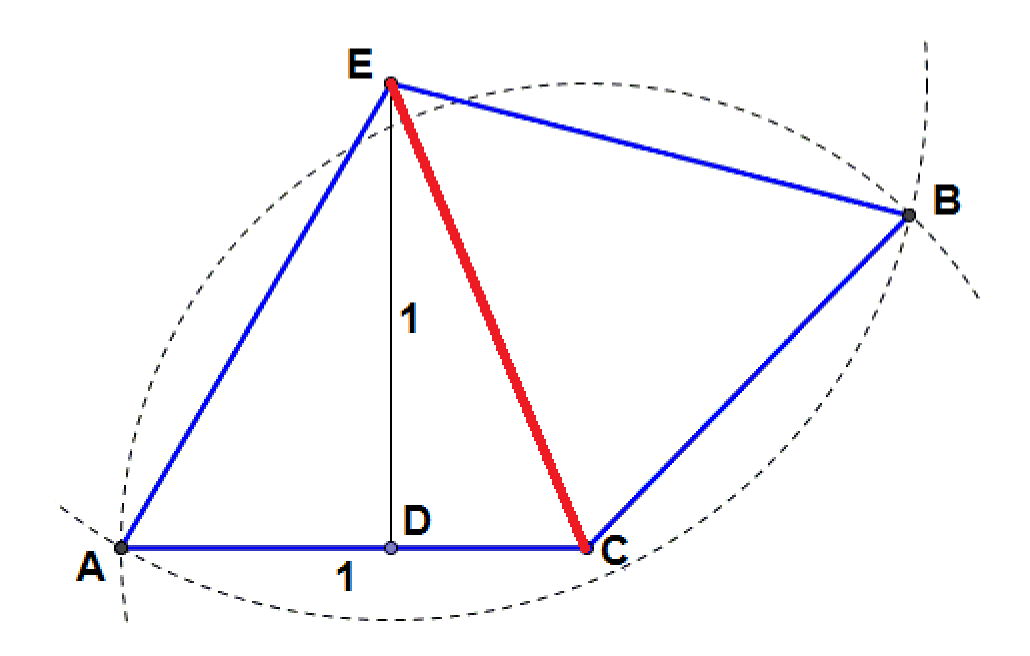
Trazamos el segmento EB y movemos el triángulo ABE puesto que ED=EA.



De esta forma nos queda el siguiente problema equivalente:



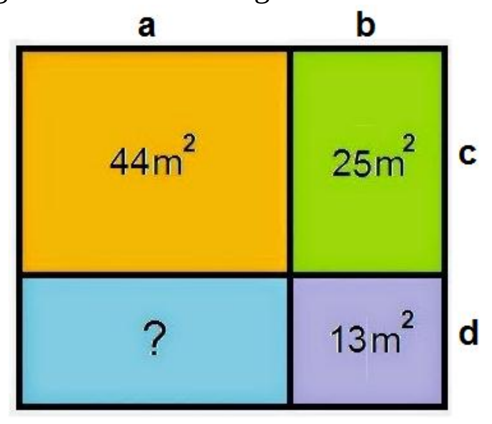
Ahora bien, marcando el segmento EC la figura se descompone en dos triángulos iguales, pues AC=BC=1, EB=EA, y EC=EC.



El triángulo de la izquierda tiene área $\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ y por lo tanto la figura tiene área 1.

28.

Ponemos letras a las longitudes de los rectángulos:



El problema se convierte así en resolver:

$$\begin{cases} ac = 44 \\ bc = 25 \\ db = 13 \\ ad = ? \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} ac = 44 \Rightarrow c = \dfrac{44}{a} \\ bc = 25 \Rightarrow c = \dfrac{25}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{44}{a} = \frac{25}{b} \Rightarrow 44b = 25a \Rightarrow b = \frac{25}{44}a$$

$$13 = db = d\left(\frac{25}{44}a\right) \Rightarrow \frac{13 \cdot 44}{25} = ad$$

$$ad = \frac{572}{25} = 22.88$$

29.

$$f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) + 2 \cdot 2 = 3 + 3 + 4 = 10$$

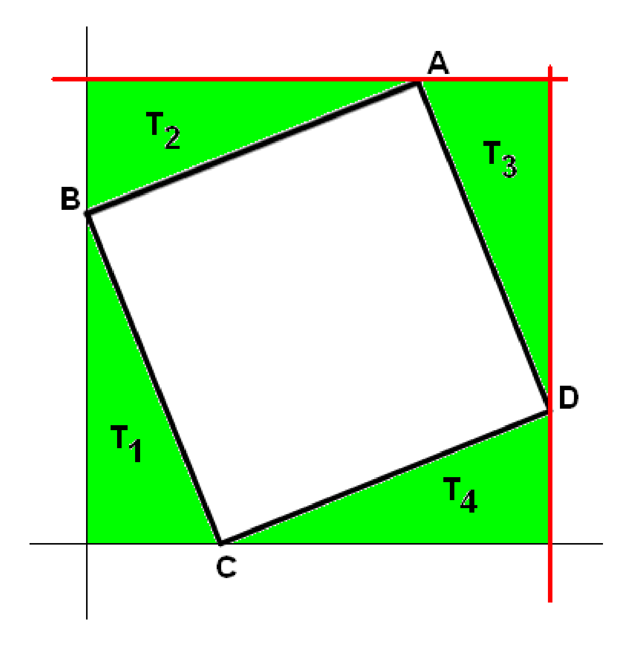
$$f(6) = f(2+4) = f(2) + f(4) + 2 \cdot 4 = 3 + 10 + 8 = 21$$

$$21 = f(6) = f(3+3) = f(3) + f(3) + 3 \cdot 3 = 2f(3) + 9 \Rightarrow$$
$$21 = 2f(3) + 9 \Rightarrow$$
$$21 - 9 = 2f(3) \Rightarrow$$
$$12 = 2f(3) \Rightarrow$$
$$6 = f(3)$$

$$f(5) = f(2+3) = f(2) + f(3) + 2 \cdot 3 = 3 + 6 + 6 = 15$$

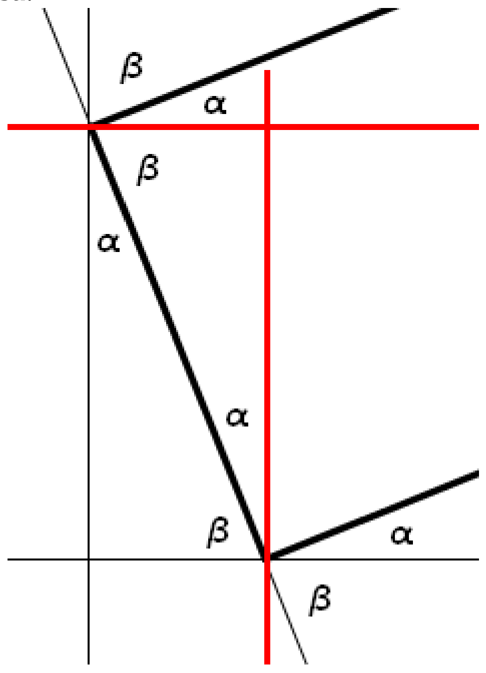
$$f(11) = f(5+6) = f(5) + f(6) + 5 \cdot 6 = 15 + 21 + 30 = 66$$

30.

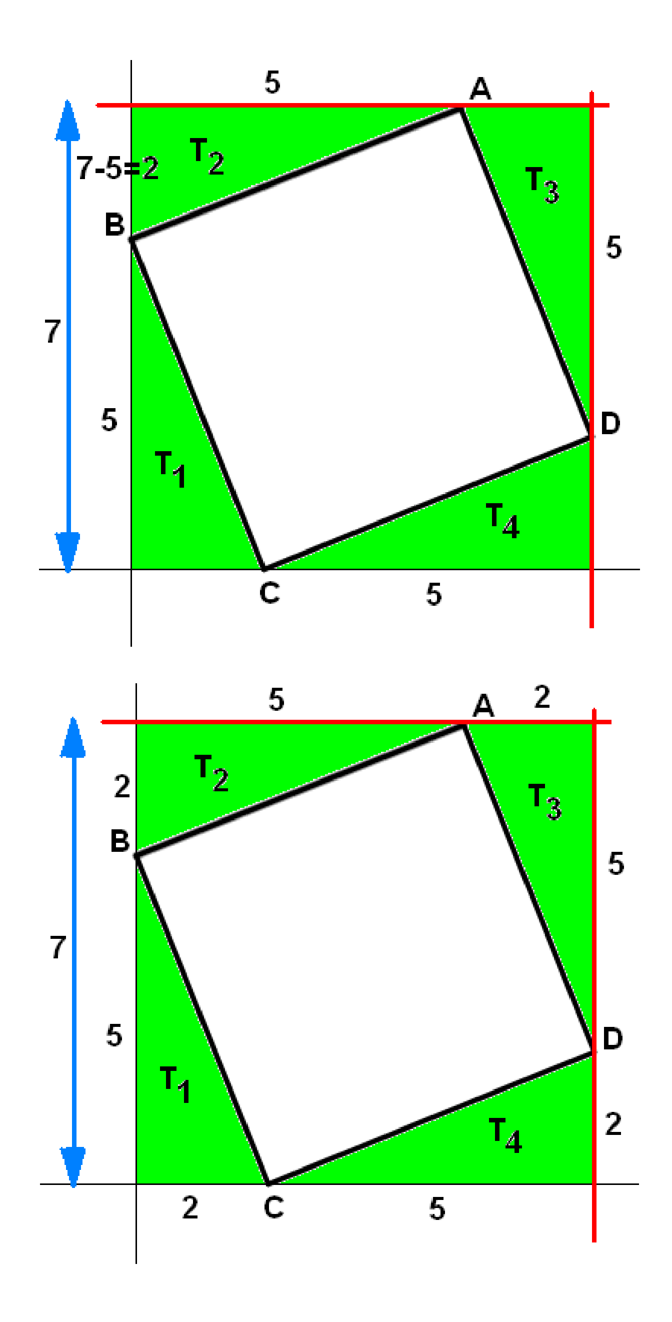


Lanzamos la recta paralela al eje X que pasa por A y la paralela al eje Y que pasa por D

Se ve claramente que los triángulos T_1, T_2, T_3 y T_4 son iguales, pues son semejantes y tienen la misma hipotenusa:



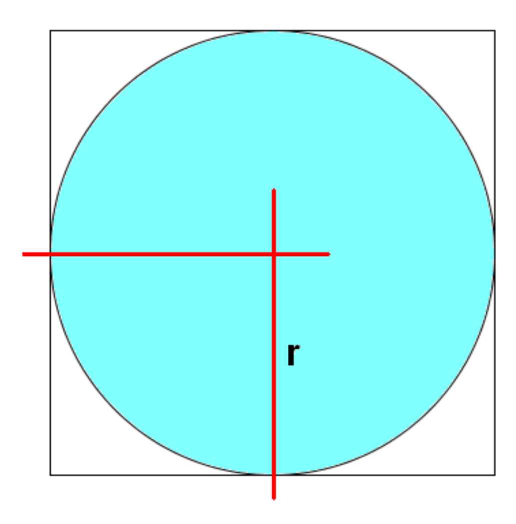
Con esto podemos deducir fácilmente todas las distancias alrededor del cuadrado:



Por lo tanto D=(7,2)

31.

- Clavija redonda en el hueco cuadrado:

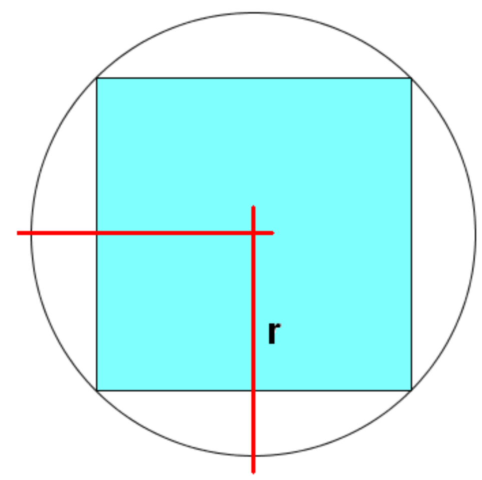


La superfície de la clavija es $S_1 = \pi \cdot r^2$

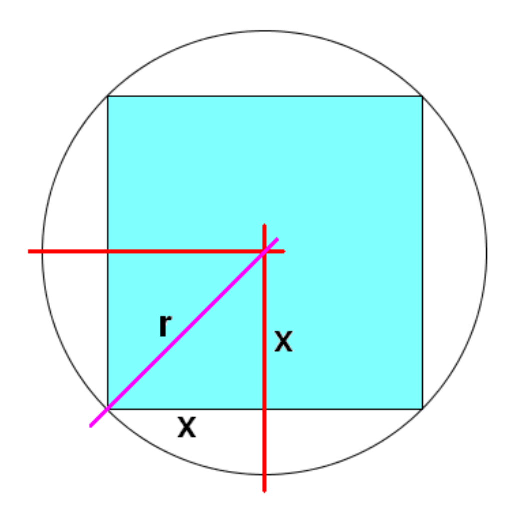
Y la superfície del hueco cuadrado es $S_2 = r^2$

Luego $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \cong 0.785$

- Clavija cuadrada en hueco redondo:



Para calcular la superfície de la clavija redonda utilizamos Pitágoras:



$$r^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{r^2}{2} = x^2 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$S_1 = (2x)^2 = \left(2\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4r^2}{2} = 2r^2$$

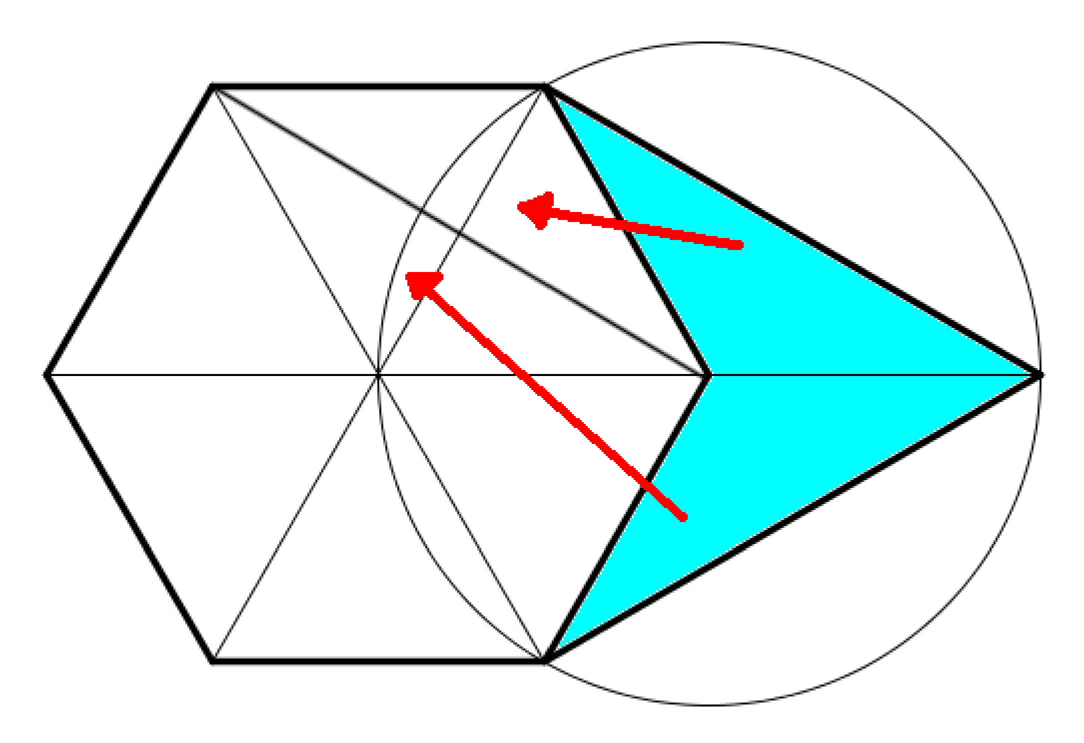
La superfície del hueco redondo es $S_2 = \pi \cdot r^2$

Y la razón Clavija/hueco es $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} \cong 0.637$

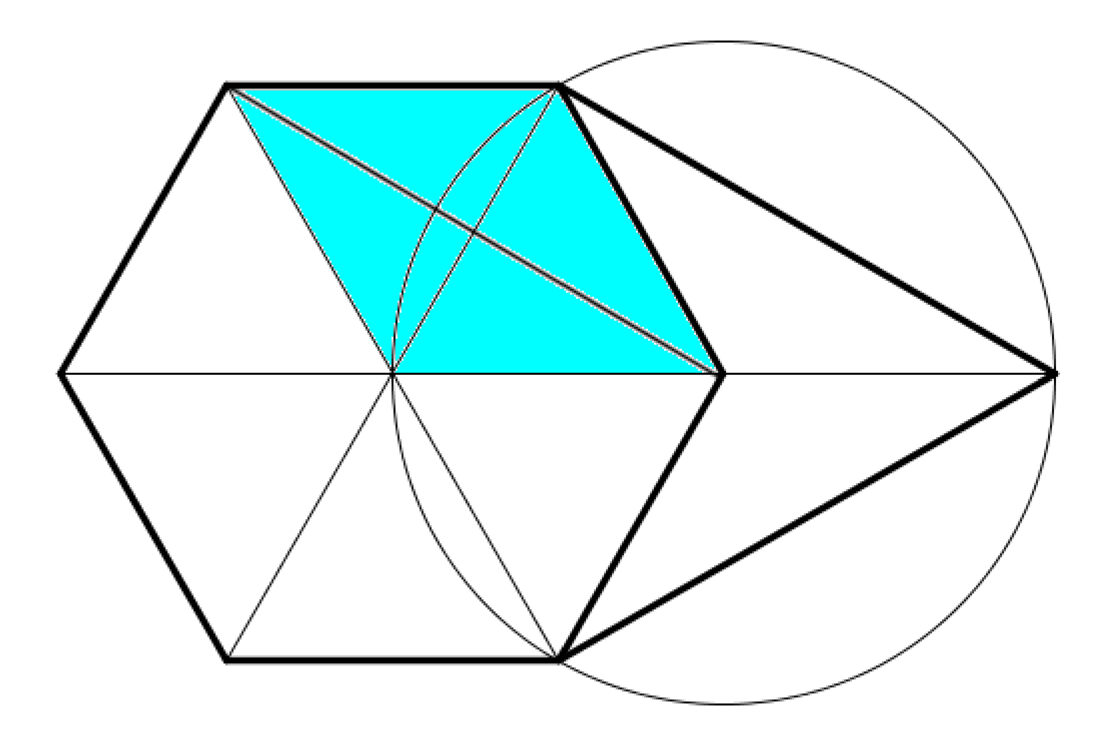
Por lo tanto se adapta mucho mejor la clavija redonda en el hueco cuadrado.

32.

Descomponiendo el hexágono en seis triángulos equiláteros la figura encaja en la parte interior del hexágono:

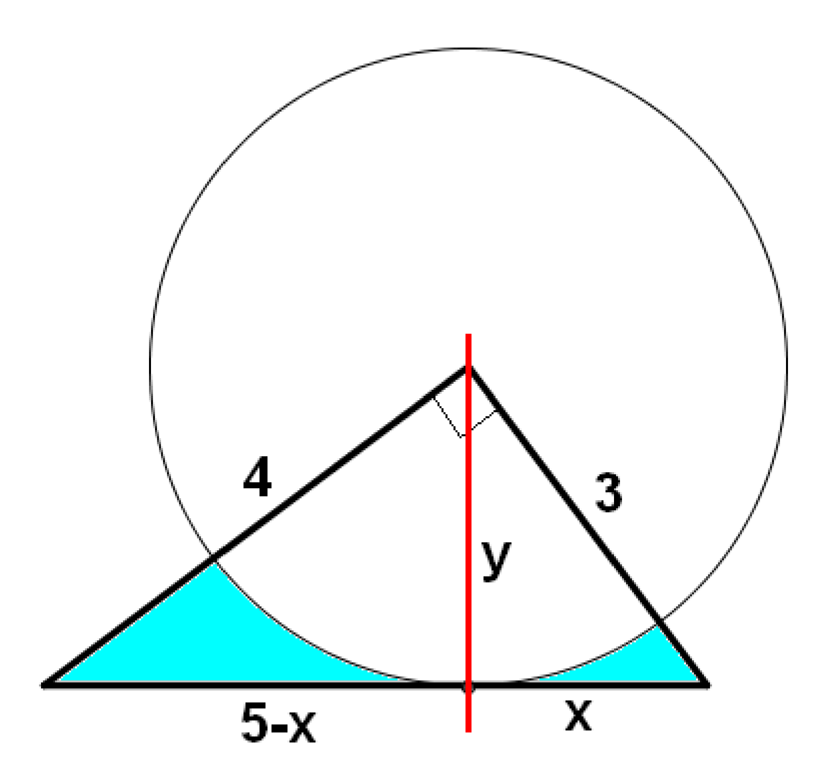


Con lo cual vemos que el área sombreada es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ del área del hexágono:



33.

Calculamos el radio de la circunferencia sabiendo que es la altura “y” del triángulo (si la base es tangente la altura es perpendicular y por lo tanto es un radio):



Se trata de resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (5-x)^2 + y^2 = 4^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = 9 - x^2 \quad (*) \\ (5-x)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(5-x)^2 + 9 - x^2 = 16$$

$$25 - 10x + x^2 + 9 - x^2 = 16$$

$$34 - 10x = 16$$

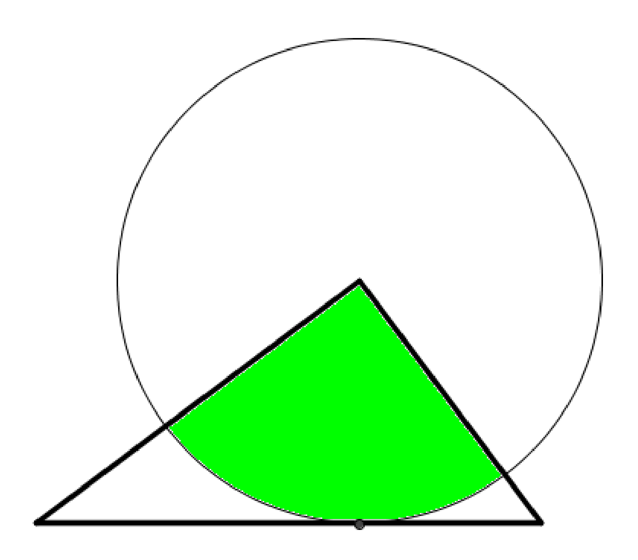
$$-10x = 16 - 34$$

$$-10x = -18$$

$$x = \frac{-18}{-10} = \frac{18}{10}$$

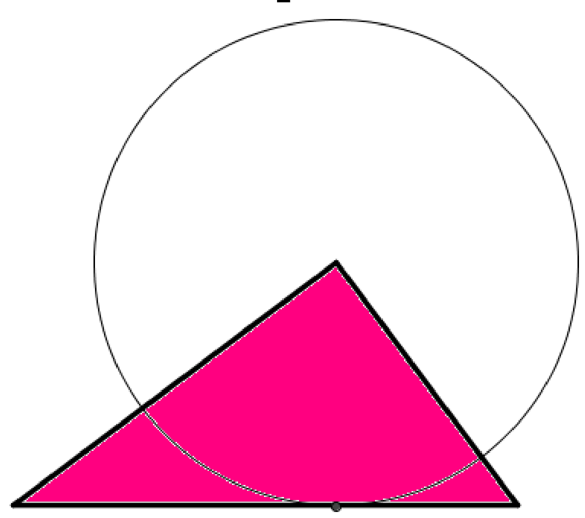
$$(*) \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 = 9 - \left(\frac{18}{10}\right)^2 = \frac{144}{25} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$$

Luego el área del sector circular



es $A_1 = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}\pi$

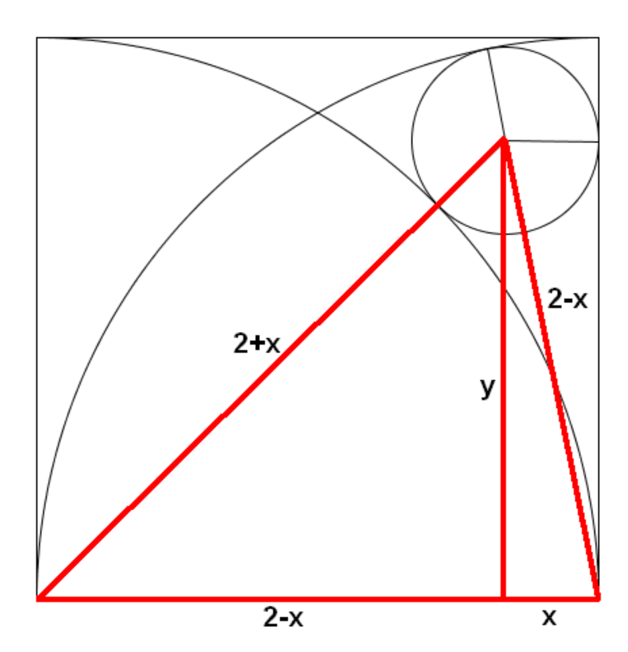
El área del triángulo es claramente $A_2 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$



Y por tanto el área buscada es $A = A_2 - A_1 = 6 - \frac{36}{25}\pi \cong 1.476$

34.

El centro de la circunferencia determina con la base del cuadrado dos triángulos rectángulos que comparten la misma altura y:



Por lo tanto y utilitzando Pitágoras sólo tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (2-x)^2 \\ (2-x)^2 + y^2 = (2+x)^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = (2-x)^2 \Rightarrow y^2 = (2-x)^2 - x^2 \quad (*)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$(2-x)^2 + (2-x)^2 - x^2 = (2+x)^2$$
$$2(2-x)^2 - x^2 = (2+x)^2$$
$$2(4-4x+x^2) - x^2 = 4+4x+x^2$$
$$8-8x+2x^2 - x^2 = 4+4x+x^2$$
$$8-8x = 4+4x$$
$$4 = 12x$$
$$x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

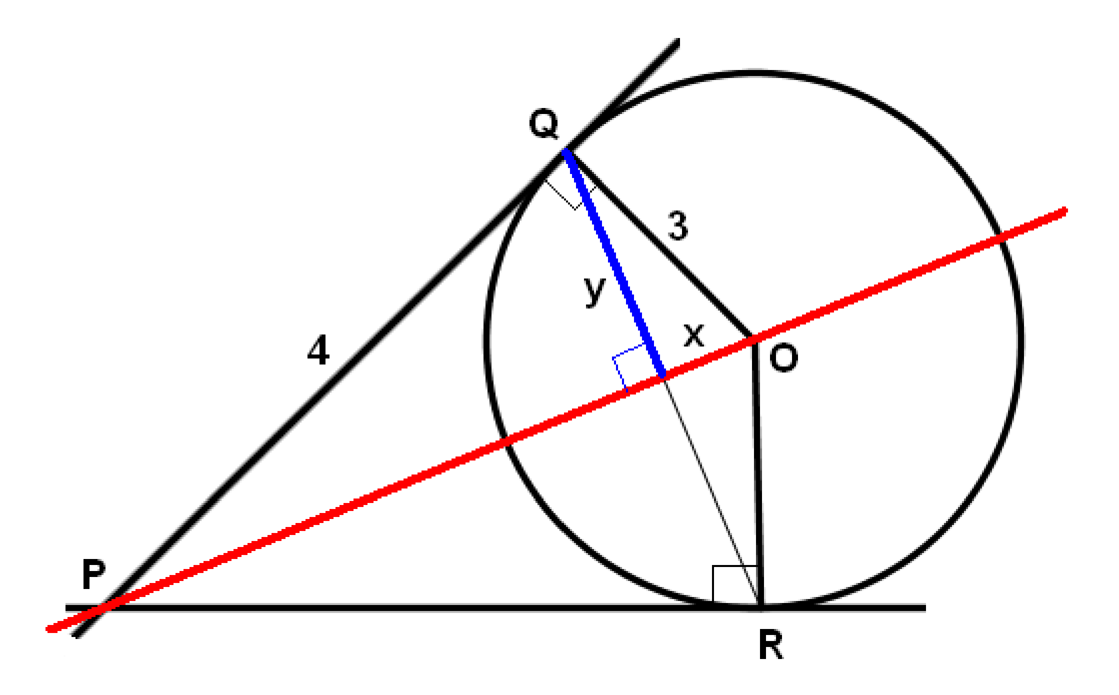
Sustituyendo en (*) tenemos que

$$y^2 = \left(2-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

$$y = \sqrt{\frac{8}{3}} \cong 1.634$$

Luego el centro de la circunferencia es $\left(2-\frac{1}{3},\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=\left(\frac{5}{3},\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$ y tiene radio $\frac{1}{3}$.

35.



Por Pitágoras, la distancia PO es $PO = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Queremos encontrar la altura **y** del triángulo POQ, es decir, resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (5-x)^2 + y^2 = 4^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = 9 - x^2 \quad (*) \\ (5-x)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(5-x)^2 + 9 - x^2 = 16$$

$$25 - 10x + x^2 + 9 - x^2 = 16$$

$$34 - 10x = 16$$

$$-10x = 16 - 34$$

$$-10x = -18$$

$$x = \frac{-18}{-10} = \frac{18}{10}$$

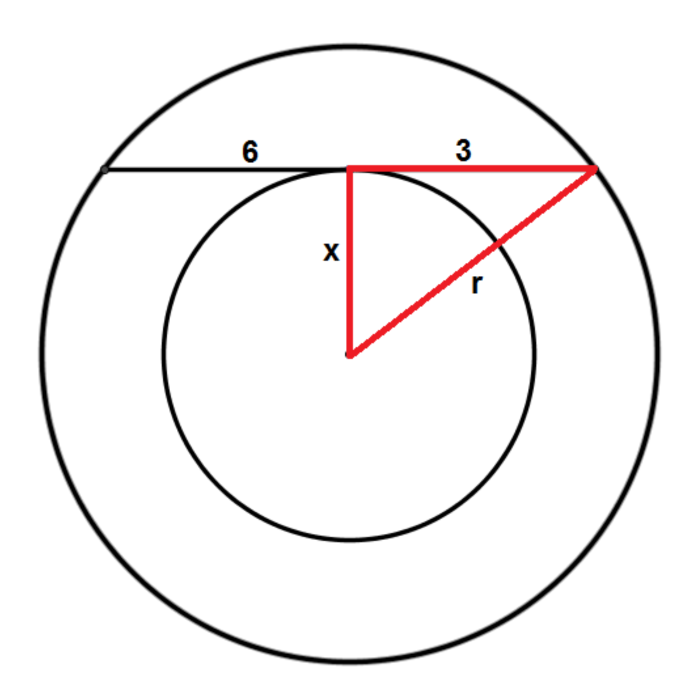
$$(*) \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 = 9 - \left(\frac{18}{10}\right)^2 = \frac{144}{25} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$$

Por lo tanto $QR = 2y = \dfrac{24}{5} = 4.8$

36.

Sea x el radio de la circunferencia interior. El área interior es pues $A_1 = \pi x^2$

Observamos que podemos determinar el radio r de la circunferencia exterior mediante Pitágoras:



$r = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$

El área exterior será $A_2 = \pi r^2 = \pi(x^2 + 9)$

Y por tanto

$A = A_2 - A_1 = \pi(x^2 + 9) - \pi x^2 = \pi x^2 + 9 - \pi x^2 = 9$

Observamos que el área no depende del radio x de la circunferencia.

37.

Versión 1: Mediante proporcionalidad de triángulos:

Sea $F=(0,0),\ E=(3,0),\ A=(0,3),\ D=(3,3),\ B=(1,3),\ C=(2,3)$

La recta AE tiene por ecuación $y=-x+3$

La recta FC tiene por ecuación $y=\frac{3}{2}x$

La recta FG tiene por ecuación $y=3x$

Entonces el punto G tiene por coordenadas la solución del sistema

$$\begin{cases} y=-x+3 \\ y=3x \end{cases} \Rightarrow G=\left(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right)$$

Por lo tanto el área del triángulo FGA es $A_1=\frac{3\cdot 3/4}{2}=\frac{9}{8}$

El punto H tiene por coordenadas la solución del sistema

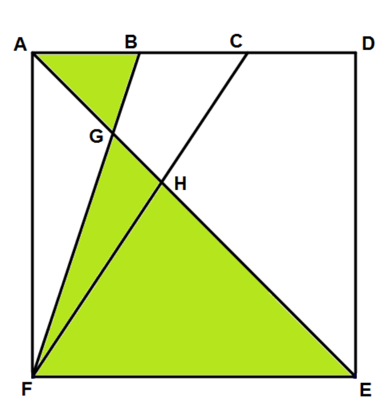
$$\begin{cases} y=-x+3 \\ y=\frac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow G=\left(\frac{6}{5},\frac{9}{5}\right)$$

Por lo tanto el área del triángulo FHA es $A_2=\frac{3\cdot 6/5}{2}=\frac{9}{5}$

Así pues, el área buscada es $A=A_2-A_1=\frac{9}{5}-\frac{9}{8}=\frac{27}{40}$

Versión 2: Mediante triángulos semejantes:

Los triángulos GFE y ABG son semejantes:

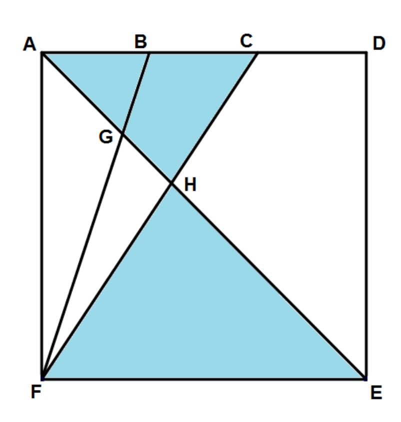


por lo tanto $\frac{AG}{GE} = \frac{AB}{FE} = \frac{1}{3}$

Por otro lado $AG + GE = AE$, por lo tanto

$$\frac{1}{3} = \frac{AG}{GE} = \frac{AG}{AE - AG} \Rightarrow AE - AG = 3AG \Rightarrow AE = 3AG + AG = 4AG \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{AG}{AE} = \frac{1}{4}$$

Los triángulos ACH y FEH son también semejantes:



por lo tanto $\frac{AH}{HE} = \frac{AC}{FE} = \frac{2}{3}$

$$AE = AH + HE$$
$$\frac{2}{3} = \frac{AH}{HE} = \frac{AH}{AE - AH} \Rightarrow 2(AE - AH) = 3AH \Rightarrow 2AE - 2AH = 3AH$$
$$\Rightarrow 2AE = 3AH + 2AH = 5AH \Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{2}{5}$$

$$GH = AH - AG \Rightarrow$$
$$\frac{GH}{AE} = \frac{AH - AG}{AE} = \frac{AH}{AE} - \frac{AG}{AE} = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

El área del triángulo AFE es claramente $\frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$ por lo tanto el área del triángulo FHG será $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{20} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{40}$

Fuente de esta segunda versión: “Snail Erato”
https://plus.google.com/u/0/105325446251524768343/posts

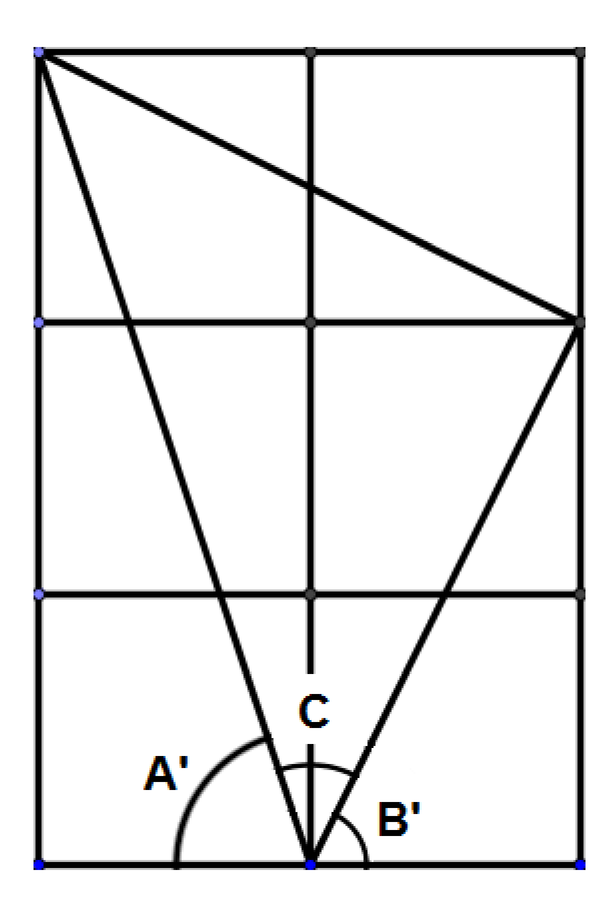
Otra demostración en: https://app.box.com/s/uk3nmbluhrhm4el0wqkf

38.

Mediante el siguiente esquema podemos ver fácilmente que

$$A'+B'+C=180^{o}$$

Donde $A+A'=90^{o}$ y $B+B'=90^{o}$

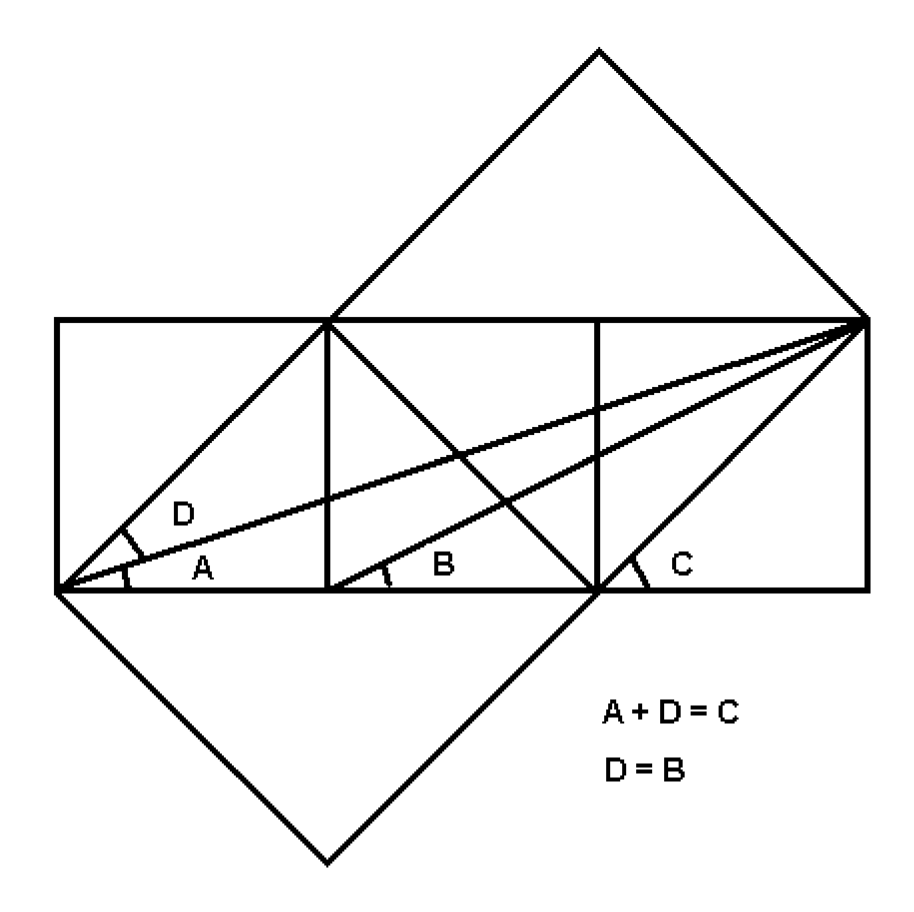


Luego

$180=A'+B'+C=90-A+90-B+C\Rightarrow$
$0=-A-B+C$
$C=A+B$

Fuente de la solución: http://math.stackexchange.com/questions/197393/why-does-tan-11-tan-12-tan-13-pi
(por indicación de Josep Font:
https://plus.google.com/u/0/108257968126662256318/posts)

Una solución alternativa la encontramos en la siguiente figura:



Esta imagen ha sido extraída de:
http://platea.pntic.mec.es/jescuder/s_geomet.htm

39.

Primera versión: Con ecuaciones y Pitágoras:

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2} \Rightarrow CD = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

Sea

$$\left.\begin{array}{l} x = CE \\ y = BE \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} EA = CA - x = \sqrt{a^2 + c^2} - x \\ \mathrm{EA}^2 + y^2 = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sqrt{a^2 + c^2} - x\right)^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{a^2 + c^2}\right)^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2 + c^2} + y^2 = c^2$$

$$a^2 + c^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2 + c^2} + y^2 = c^2$$

$$a^2 + x^2 - 2x\sqrt{a^2 + c^2} + y^2 = 0$$

Aplicando (*) en la última ecuación queda

$$a^2 - 2x\sqrt{a^2 + c^2} + a^2 = 0$$

$$-2x\sqrt{a^2 + c^2} + 2a^2 = 0$$

$$-2x\sqrt{a^2 + c^2} = -2a^2$$

$$x = \frac{-2a^2}{-2\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Por último:

$$ED = \frac{AC}{2} - x = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{a^2 + c^2}}{2\sqrt{a^2 + c^2}} - \frac{2a^2}{2\sqrt{a^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{a^2 + c^2 - 2a^2}{2\sqrt{a^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{2\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Segunda versión: Con semejanza de triángulos y áreas:

$$\acute{A}rea\ ABC = \frac{a\,c}{2} = \frac{BE \cdot CA}{2} \Rightarrow BE \cdot CA = a\,c \Rightarrow BE = \frac{a\,c}{CA} = \frac{a\,c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Los triángulos BEC y ABC son semejantes (son dos triángulos que tienen los tres ángulos iguales), por lo tanto

$$\frac{BE}{CE} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} \Rightarrow c\,BE = a\,CE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CE = \frac{c\,BE}{a} = \frac{c\,\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}}{a} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Por último,

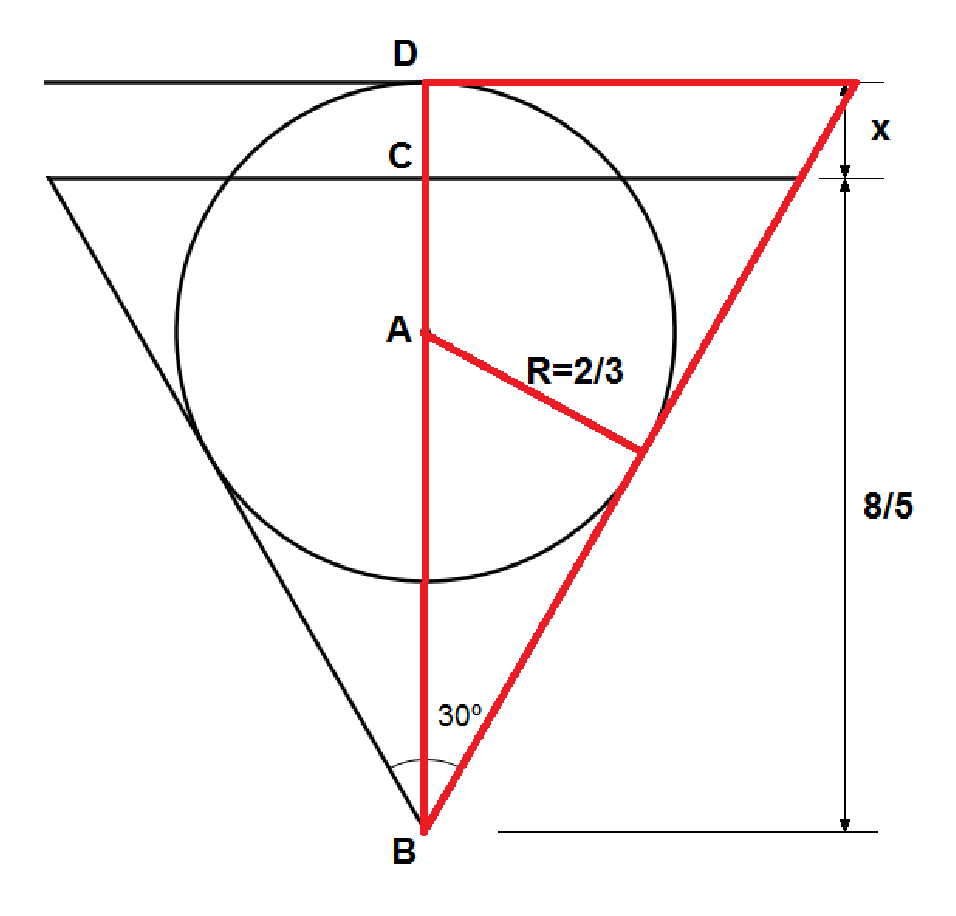
$$ED = CD - CE = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + c^2}\,\sqrt{a^2 + c^2} - 2a^2}{2\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{\left(a^2 + c^2\right) - 2a^2}{2\sqrt{a^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{2\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Fuente de esta segunda versión: Theppitak Karoonboonyanan (Google+)

40.



$$\sin(30^o) = \frac{2/3}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2/3}{\sin(30^o)} = \frac{2/3}{1/2} = \frac{4}{3}$$

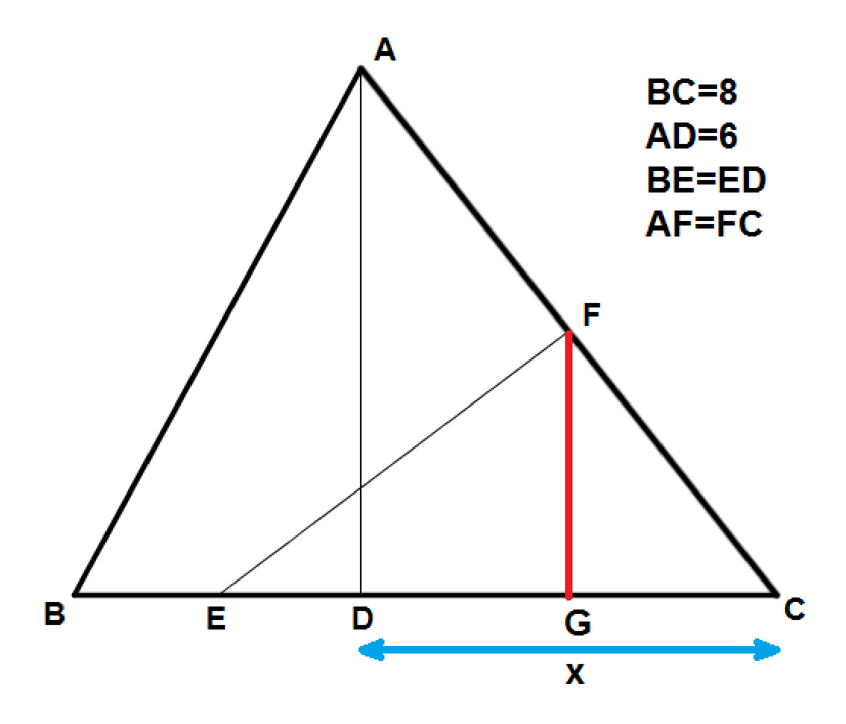
$$BC = \frac{8}{5} \Rightarrow AC = \frac{8}{5} - AB = \frac{8}{5} - \frac{4}{3} = \frac{4}{15}$$

$$AD = \frac{2}{3}$$

$$x = DC = AD - AC = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$$

41.

Lanzamos la perpendicular a AD por F, que cortará en G el segmento BC. Llamamos x a la longitud GC:



$$x = DC \Rightarrow DG = GC = \frac{x}{2}$$

$$BD = 8 - x$$

$$ED = \frac{BD}{2} = \frac{8-x}{2} = 4 - \frac{x}{2}$$

$$EG = ED + DG = 4 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 4$$

Sea α el ángulo BCA.

$$\tan(\alpha) = \frac{6}{x} = \frac{FG}{x/2} = \frac{2FG}{x} \Rightarrow 6 = 2FG \Rightarrow FG = 3$$

Por último, por Pitágoras:

$$EF^2 = EG^2 + GF^2 \Rightarrow EF = \sqrt{EG^2 + GF^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Es interesante observar que esta distancia no depende de x.

42.

Mediante geometría cartesiana y derivación:

La función que buscamos es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Puesto que pasa por el punto (0,0) tenemos que
$0 = f(0) = a0^2 + b0 + c = c \Rightarrow c = 0$

La pendiente de la hipotenusa es $\frac{h}{d}$ luego
$f'(x) = 2ax + b$
$\frac{h}{d} = f'(0) = 2a0 + b \Rightarrow$
$b = \frac{h}{d}$

Así pues la función es de la forma $f(x) = ax^2 + \frac{h}{d}x$

$$0 = f(d) == ad^2 + \frac{h}{d}d = ad^2 + h \Rightarrow$$

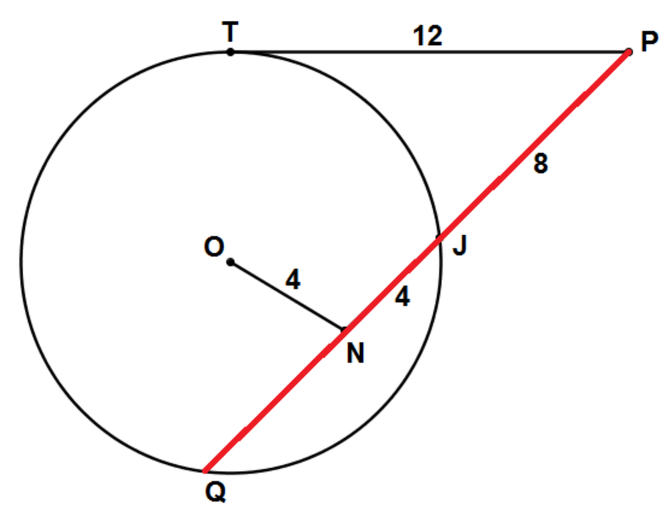
Por último tenemos que $ad^2 = -h$
$$a = \frac{-h}{d^2}$$

La función es por tanto

$$f(x) = \frac{-h}{d^2}x^2 + \frac{h}{d}x = \frac{-h}{d}x\left(\frac{x}{d} - 1\right)$$

43.

Prolongamos el segmento PN hasta la circunferencia en Q:



Por el teorema Tangente-Secante tenemos que

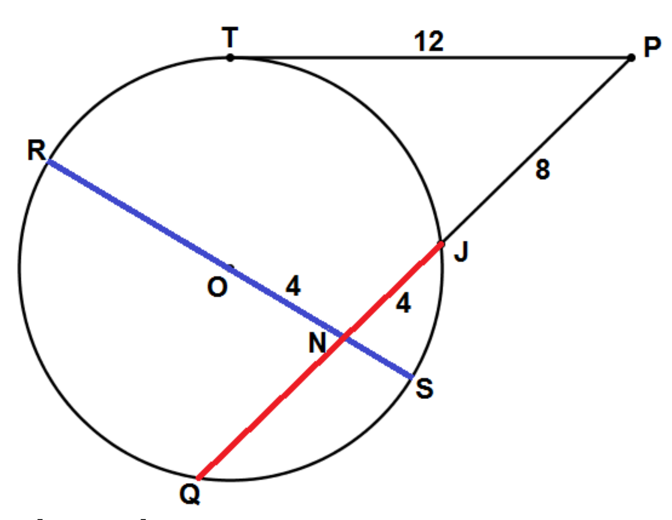
$TP^2 = PJ \cdot QP$

$12^2 = 8 \cdot QP$

$QP = 18$

Luego $JQ = PQ - JP = 18 - 8 = 10$ y de la misma manera $QN = QJ - NJ = 10 - 4 = 6$

Ahora prolongamos el segmento ON hasta convertirlo en la cuerda RS:



Por el teorema Cuerda-Cuerda tenemos que

$RN \cdot NS = QN \cdot NJ = 6 \cdot 4 = 24$

Pero también sabemos que $RN = r + 4$ y $NS = r - 4$, luego

$(r+4)(r-4) = 24$

$r^2 - 16 = 24$

$r^2 = 24 + 16$

$r^2 = 40$

$r = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

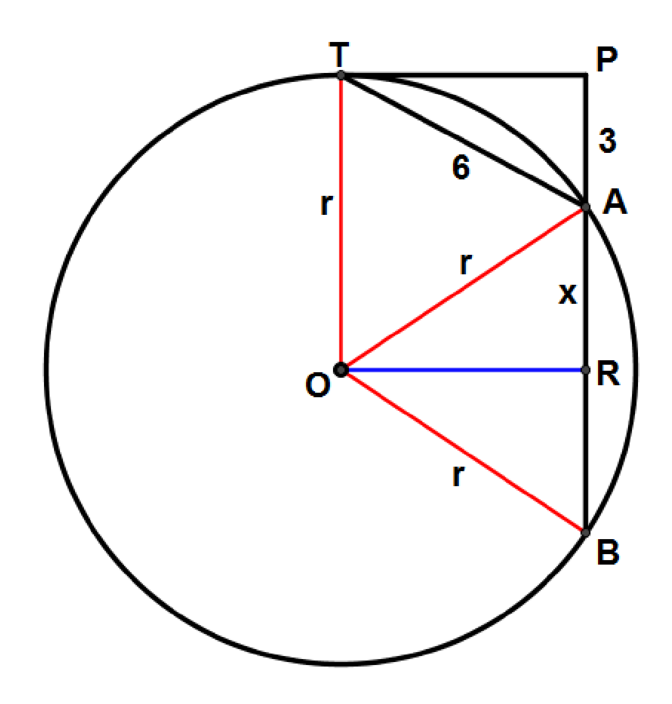
44.

Primera versión:

La distancia de O a AB es la longitud del segmento TP que se puede deducir aplicando Pitágoras al triangulo rectángulo superior:

$$PT = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Para calcular AB lanzamos la paralela a TP por O, que cortará AB en R, sea x la distancia AR=RB:



Aplicando Pitágoras $x^2 + \sqrt{27}^2 = r^2$, pero también $r = x + 3$, luego

$x^2 + \sqrt{27}^2 = (x+3)^2$

$x^2 + 27 = x^2 + 6x + 9$

$27 = 6x + 9$

$27 - 9 = 6x$

$18 = 6x$

$x = 3$

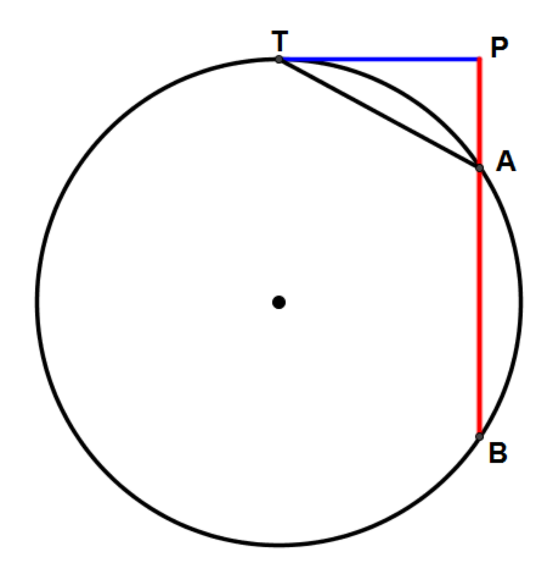
Luego $AB = 2x = 6$

Por último, $r = x + 3 = 3 + 3 = 6$

Segunda versión para calcular la longitud AB:

Aplicando el teorema Tangente-Secante (*):

$$TP^2 = PA \cdot PB$$



Luego:

$$\sqrt{27}^2 = 3 \cdot PB$$
$$27 = 3(AB + 3)$$
$$\frac{27}{3} = AB + 3$$
$$9 = AB + 3$$
$$6 = AB$$

(*) Más información: www.toomates.net/Llistes/a2014/des/cuerda_secante_tangente.doc

Fuente de esta segunda versión: http://www.math-principles.com/2014/12/circle-and-secant-segment-problems-3.html

45.

Aplicando el teorema Tangente-Secante en la circunferencia con centro en A:

$EF^2 = CF \cdot DF$

pero aplicando este mismo teorema en la circunferencia con centro en B tenemos que

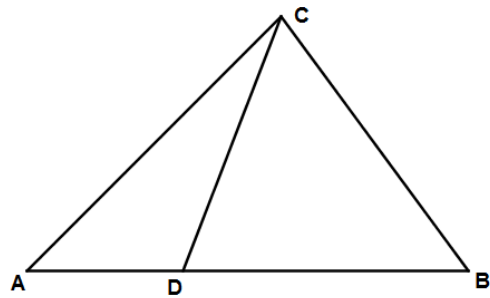
$GF^2 = CF \cdot DF$

Luego $EF^2 = GF^2 \Rightarrow EF = GF$

46.

Vamos a utilizar la siguiente propiedad:

En todo triángulo si dividimos la base en dos segmentos, las áreas de los triángulos resultantes son proporcionales a dichos segmentos:



$$\frac{S_{ACD}}{S_{CBD}} = \frac{AD}{DB}$$

Efectivamente:

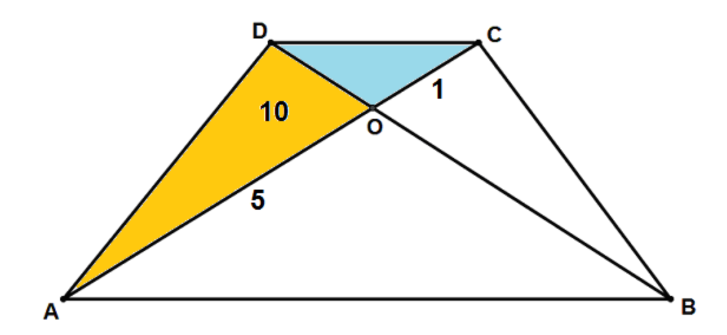
$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin(ADC)$$

$$S_{CBD} = \frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin(BDC)$$

Pero $BDC = \pi - ADC \Rightarrow \sin(BDC) = \sin(ADC)$, por lo tanto

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CBD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin(ADC)}{\frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin(BDC)} = \frac{AD}{DB}$$

Aplicamos este resultado a los triángulos interiores del cuadrilátero:



$$\frac{S_{AOD}}{S_{DCO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{5}{1} \Rightarrow 10 = S_{AOD} = 5 \cdot S_{DCO} \Rightarrow S_{DCO} = \frac{10}{5} = 2$$

La proporcionalidad se conserva por rectas paralelas, luego

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AO}{OC} = \frac{5}{1}$$

Por lo tanto aplicando nuevamente la propiedad de las áreas, tenemos

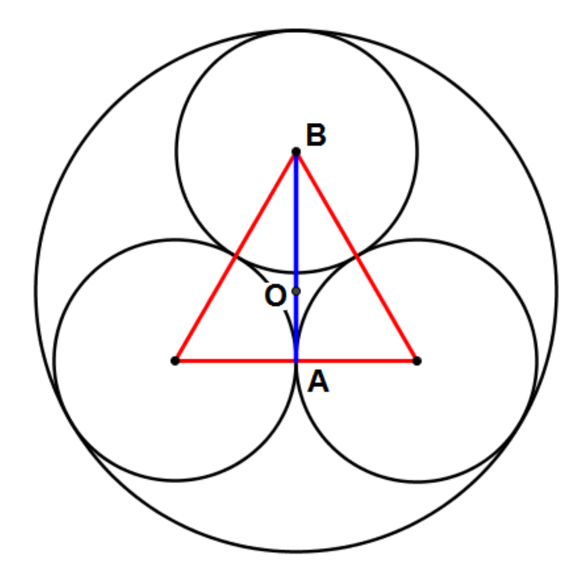
$$\frac{S_{OBC}}{S_{OCD}} = \frac{OB}{OD} = \frac{5}{1} \Rightarrow S_{OBC} = 5 \cdot S_{OCD} = 5 \cdot 2 = 10$$

Por último:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD} = \frac{5}{1} \Rightarrow S_{AOB} = 5 \cdot S_{AOD} = 5 \cdot 10 = 50$$

Así pues, $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{DCO} + S_{OBC} + S_{AOB} = 10 + 2 + 10 + 50 = 72$

47.



Los tres centros de las circunferencias interiores determinan un triángulo equilátero de lado 2. Determinamos su altura AB mediante el teorema de Pitágoras:

$$AB = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

El centro O de la circunferencia exterior es el baricentro de este triángulo. El baricentro de un triángulo tiene la propiedad $AB = 3OA$, luego

$$OA = \frac{AB}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OB = AB - OA = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ahora ya podemos deducir el radio de la circunferencia exterior:

$$r = 1 + OB = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

Y determinar su superficie:

$$A = \pi\, r^2 = \pi\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\left(3 + 2\sqrt{3}\right)^2}{9}\pi =$$

$$= \frac{9 + 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{3} + 4\cdot 3}{9}\pi = \frac{21 + 14\sqrt{3}}{9}\pi = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}\pi$$

48.

Aplicando el teorema de Tales tenemos

$$\frac{NF}{FE} = \frac{ND}{DB} \text{ y } \frac{ND}{DB} = \frac{NG}{GH}$$

luego

$$\frac{NF}{FE} = \frac{NG}{GH}$$

o equivalentemente

$$\frac{NF}{NG} = \frac{FE}{GH}$$

donde FE y GH son constantes

Por otro lado $NG = NF + FG$, luego

$$NF = NG\frac{FE}{GH} = \left(NF + FG\right)\frac{FE}{GH}$$

$$NF = NF\frac{FE}{GH} + FG\frac{FE}{GH}$$

$$NF - NF\frac{FE}{GH} = FG\frac{FE}{GH}$$

$$NF\left(1 - \frac{FE}{GH}\right) = FG\frac{FE}{GH}$$

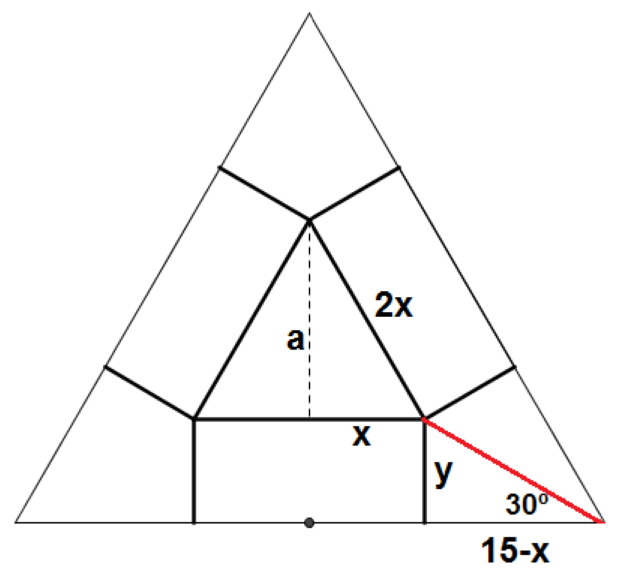
$$NF = \frac{FG\frac{FE}{GH}}{1 - \frac{FE}{GH}}$$

Así pues el punto N queda determinado por los puntos fijos F, E, G y H, por lo que también es fijo.

De la misma forma se demuestra que el punto M es fijo.

49.

Sea x la mitad de la base del triángulo interior.



La altura de este triángulo será, aplicando Pitágoras:

$$a = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

Luego la superficie de la base de la caja será:

$$A(x) = \frac{2x\sqrt{3}x}{2} = \sqrt{3}x^2$$

Necesitamos saber también la altura "y" de la caja, que encontramos por trigonometría:

$$\tan(30) = \frac{y}{15-x} \Rightarrow y = \tan(30)(15-x) = \frac{15-x}{\sqrt{3}}$$

Luego el volumen de la caja será

$$V(x) = A(x)\cdot y = \sqrt{3}x^2\,\frac{15-x}{\sqrt{3}} = x^2(15-x)$$

Su máximo lo encontraremos igualando la derivada a cero:

$$V'(x) = 30x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que $x = 0$ es un mínimo y el máximo buscado está en $x = 10$, para el cual tenemos un volumen de

$$V(10) = 500\ cm^3$$

50.

Para todo valor $y = f(x)$ que pertenece a su conjunto imagen, se tiene que

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \Rightarrow$$
$$y \cdot f(y) = 1 \Rightarrow$$
$$f(y) = \frac{1}{y}$$

Por lo tanto lo único que tenemos que demostrar es que $y = 500$ pertenece al conjunto imagen de la función, pues entonces $f(500) = \dfrac{1}{500}$

Efectivamente,

$$f(1000) \cdot f(f(1000)) = 1 \Rightarrow$$
$$999 \cdot f(999) = 1 \Rightarrow$$
$$f(999) = \frac{1}{999} < 1$$

y $f(1000) = 999$, por lo que la función, al ser continua, ha de recorrer todos los valores entre $\dfrac{1}{999}$ y 999, en particular el valor 500.

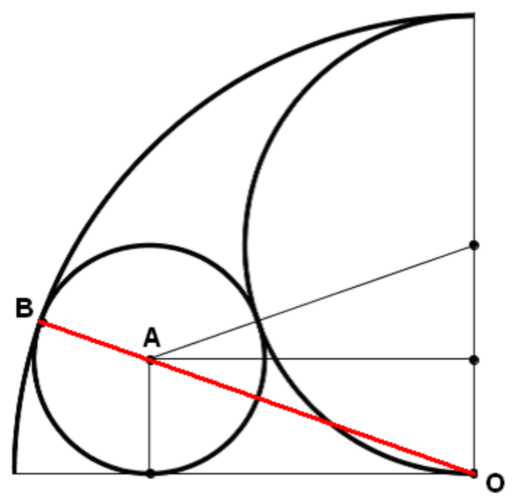
Fuente de la solución: http://www.acadblock.com/calculus/function-8h9m/

51.

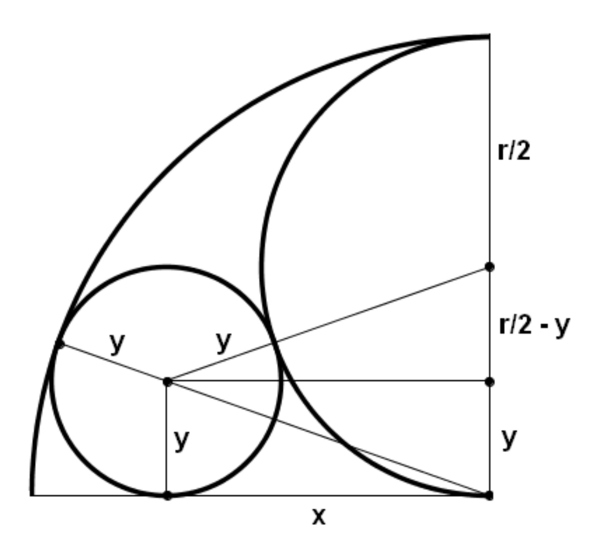
Sea r el radio de la circunferencia exterior. El radio de la circunferencia azul será $\frac{r}{2}$.

Determinemos ahora el radio y de la circunferencia amarilla:

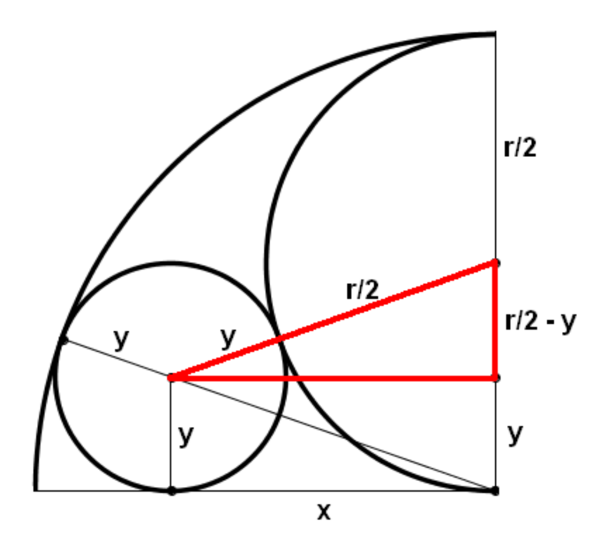
Observamos que la recta OB que une el centro O de la circunferencia mayor con el punto B de tangencia con el círculo amarillo también pasa por su centro A, puesto que siendo perpendicular a la circunferencia mayor, también lo es a la amarilla, y por lo tanto es uno de sus radios:



En la siguiente figura aparecen dos triángulos rectángulos:



Del triángulo rectángulo superior:



deducimos aplicando Pitágoras que

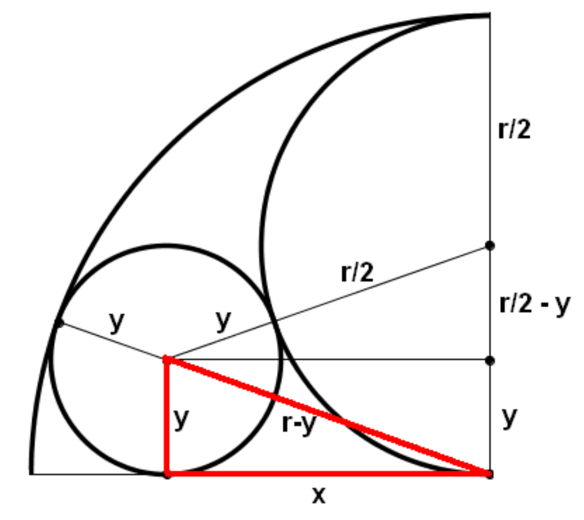
$$\left(y+\frac{r}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{r}{2}-y\right)^2$$

$$y^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 2y\frac{r}{2} = x^2 + y^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 - 2y\frac{r}{2}$$

$$yr = x^2 - yr$$

$$2yr = x^2 \quad (1)$$

Y del triángulo rectángulo inferior:



aplicando Pitágoras vemos que

$$x^2 + y^2 = (r-y)^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2 - 2ry + y^2$$

$$x^2 = r^2 - 2ry = r(r-2y) \quad (2)$$

Por lo tanto de (1) y (2) obtenemos que

$$2yr = r(r-2y) \Rightarrow 2y = r-2y \Rightarrow 4y = r \Rightarrow y = \frac{r}{4}$$

Así pues, el radio de las circunferencias amarillas es $\frac{r}{4}$.

Ahora sólo nos queda plantear la ecuación sobre las áreas de las figuras:

Área total = Área roja + Área azul + Área amarilla

$$\frac{\pi r^2}{2} = 60 + \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 + 2\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi r^2}{2} = 60 + \pi\frac{r^2}{4} + 2\pi\frac{r^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi r^2}{2} = 60 + \pi\frac{r^2}{4} + \pi\frac{r^2}{8} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4\pi r^2}{2\cdot 4} = \frac{8\cdot 60}{8} + \frac{2\pi r^2}{2\cdot 4} + \frac{\pi r^2}{8} \Leftrightarrow$$

$$4\pi r^2 = 480 + 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$4\pi r^2 = 480 + 3\pi r^2$$

$$\pi r^2 = 480$$

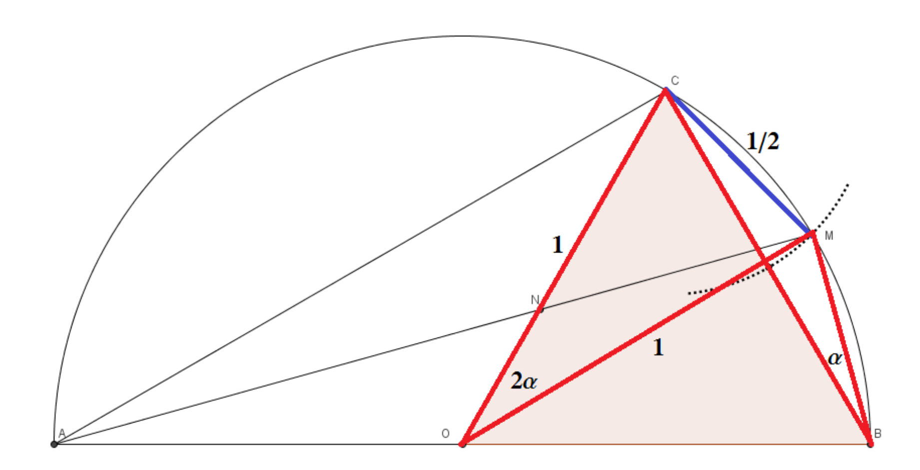
$$r = \sqrt{\frac{480}{\pi}} \approx 12.36$$

Por lo tanto, el área amarilla es $2\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2 = 2\pi\frac{r^2}{16} = 2\pi\frac{480/\pi}{16} = 60$, así pues, el área amarilla es igual al área roja.

52.

Éste es un desarrollo mediante trigonometría. Un desarrollo alternativo podría ser mediante geometría cartesiana, encontrando las coordenadas de los puntos.

Suponemos un radio $OB = 1$. Sea α el ángulo $\angle MBC$. Entonces $\angle MOC = 2\alpha$ por el teorema del ángulo central y sabemos que $OC = 1$, $OM = 1$ y $CM = \frac{1}{2}$



Por lo tanto, aplicando el teorema del coseno en el triángulo OMC tenemos que

$$CM^2 = OC^2 + OM^2 - 2 \cdot OC \cdot OM \cdot \cos(2\alpha)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(2\alpha)$$

$$\frac{1}{4} = 2 - 2\cos(2\alpha) \Rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{7}{8}$$

Puesto que $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ tenemos que

$$\frac{7}{8} = 1 - 2\sin^2(\alpha) \Rightarrow \sin^2(\alpha) = \frac{1}{16} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{4}$$

Y ahora aplicando la igualdad $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, nos queda que

$$\frac{1}{16} + \cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Sabemos que $BC = 1$, $CM = \frac{1}{2}$. Aplicamos el teorema del coseno al triánculo BMC:

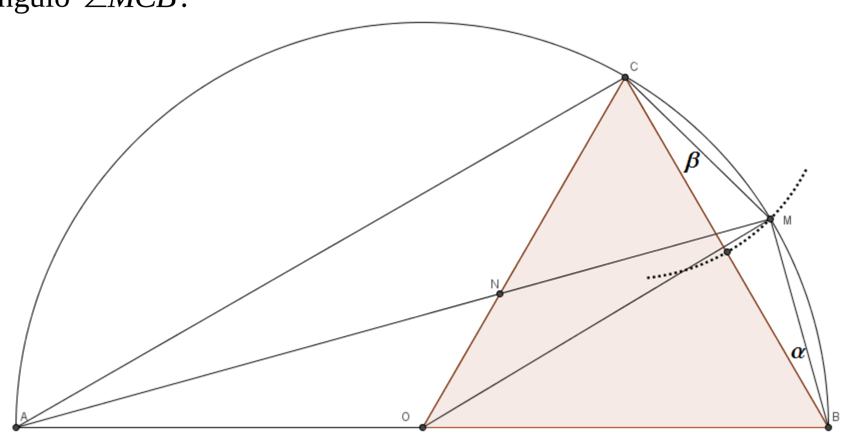
$$CM^2 = BC^2 + BM^2 - 2BC \cdot BM \cdot \cos(\alpha)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + BM^2 - 2 \cdot 1 \cdot BM \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{1}{4} = 1 + BM^2 - \frac{\sqrt{15}}{2} BM$$

De donde se deduce que $BM = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}$

Sea β el ángulo $\angle MCB$.



Por el teorema del seno:

$$\frac{\sin(\beta)}{MB} = \frac{\sin(\alpha)}{CM} \Rightarrow$$

$$\sin(\beta) = MB\frac{\sin(\alpha)}{CM} = \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}\right)\frac{1/4}{1/2} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$$

Aplicando el teorema del coseno en BMC tenemos que

$$MB^2 = CB^2 + CM^2 - 2 \cdot CM \cdot CB \cdot \cos(\beta)$$

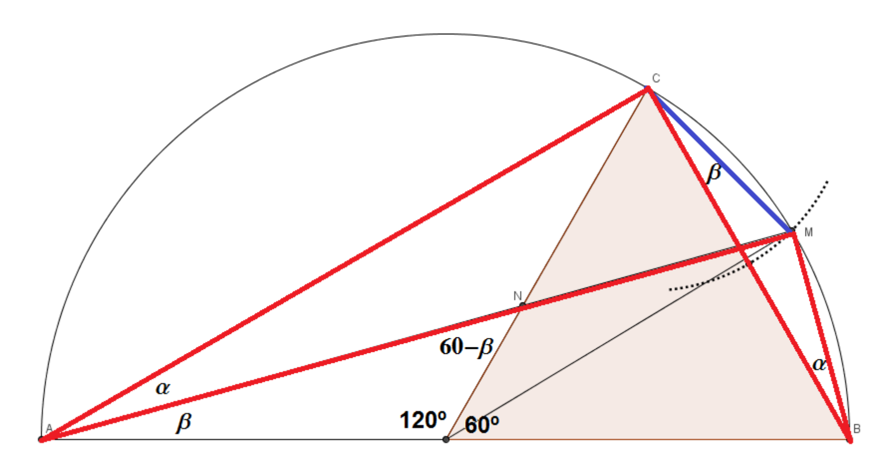
$$\left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \cos(\beta)$$

$$\frac{\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2}{16} = 1 + \frac{1}{4} - \cos(\beta)$$

$$\frac{18-6\sqrt{5}}{16} = 1 + \frac{1}{4} - \cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{18-6\sqrt{5}}{16} = \frac{16+4-\left(18-6\sqrt{5}\right)}{16} = \frac{2+6\sqrt{5}}{16} = \frac{1+3\sqrt{5}}{8}$$

$\alpha = \angle CAM$ pues los dos ángulos comparten el mismo segmento MC sobre la circunferencia. De la misma forma $\beta = \angle MAB$ pues ambos ángulos comparten el mismo segmento MB sobre la circunferencia.



Claramente $\angle BOC = 60^o$, por lo que $\angle AON = 120^o$ y por tanto $\angle ANO = 60 - \beta$ Aplicando el teorema del seno en el triángulo AON, tenemos que

$$\frac{NO}{\sin(\beta)} = \frac{1}{\sin(60-\beta)} \Rightarrow NO = \frac{\sin(\beta)}{\sin(60-\beta)}$$

Por la propiedad del seno de la suma:

$$\sin(60^o - \beta) = \sin(60^o)\cos(\beta) - \cos(60^o)\sin(\beta) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1+3\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{16} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{16} =$$

$$\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{15}-\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}{16} = \frac{2\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$$

Así pues, $NO = \dfrac{\sin(\beta)}{\sin(60-\beta)} = \dfrac{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}} = \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}+\sqrt{3}} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$CN = 1 - NO = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{2-3+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Y por último $\frac{CN}{NO} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$

Fuente de la solución:
http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/BuiGoldenRatio2.shtml

53.

Aplicamos la identidad $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

De dentro hacia fuera:

$$\sqrt{1+2015\cdot 2017}=$$
$$\sqrt{1+(2016-1)(2016+1)}=$$
$$\sqrt{1+2016^2-1^2}=$$
$$\sqrt{2016^2}=$$
$$2016$$

El siguiente paso es:

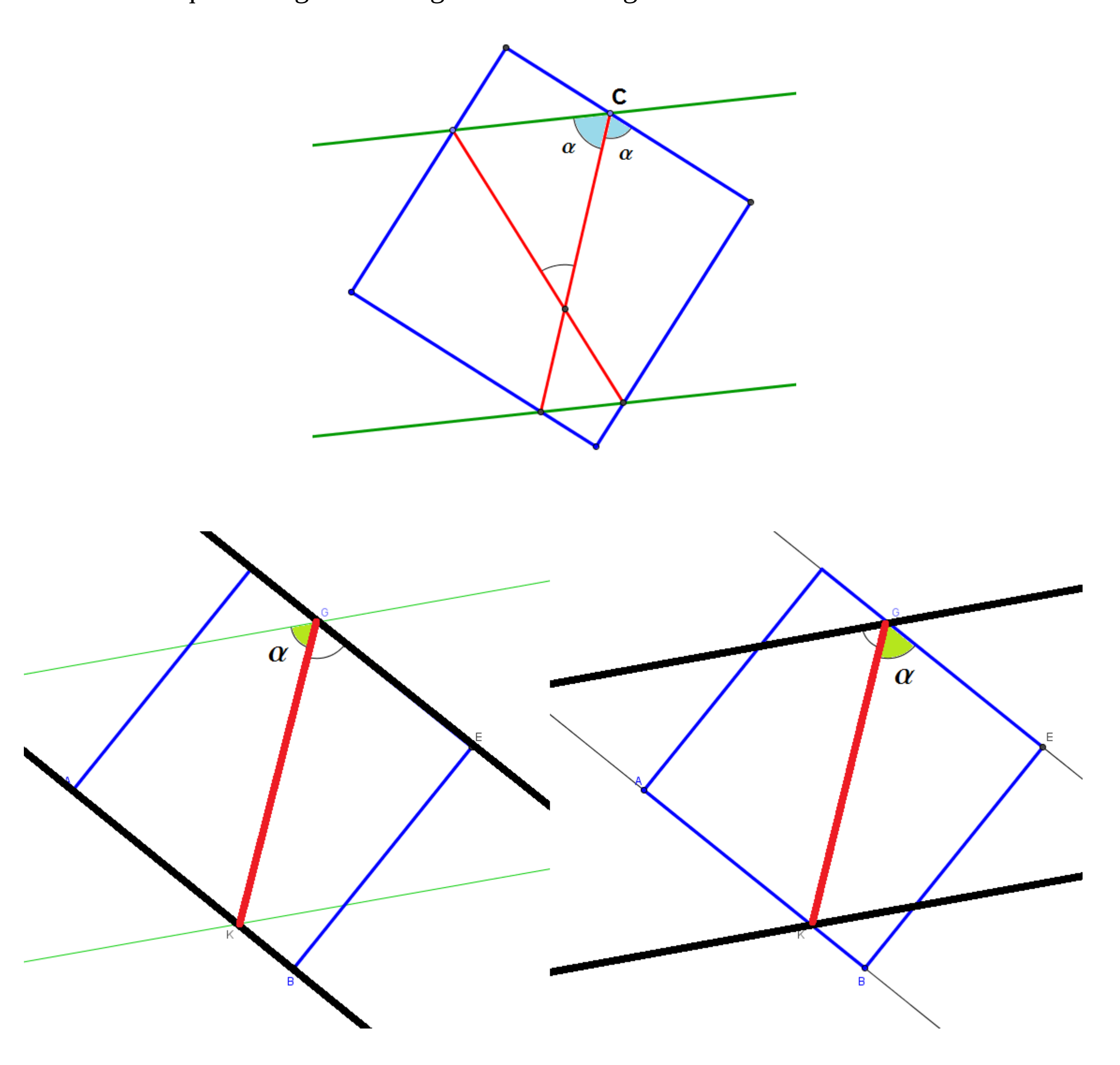
$$\sqrt{1+2014\cdot 2016}=$$
$$\sqrt{1+(2015-1)(2015+1)}=$$
$$\sqrt{1+2015^2-1^2}=$$
$$\sqrt{2015^2}=$$
$$2015$$

Así pues cada raíz se simplifica en $\sqrt{1+(n-1)(n+1)}=n$

Y el resultado final es $\sqrt{1+2\cdot 4}=3$

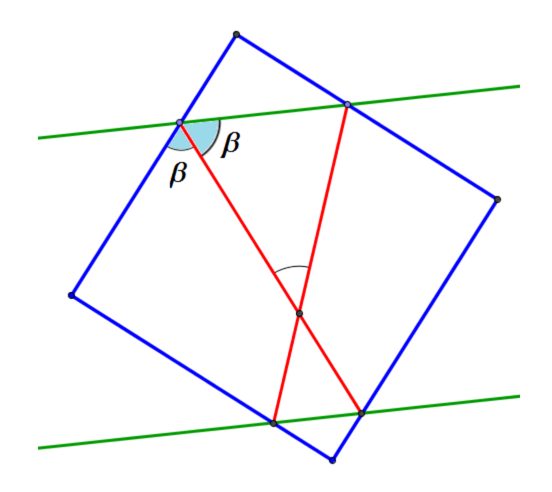
54.

Observamos que los siguientes ángulos en C son iguales:

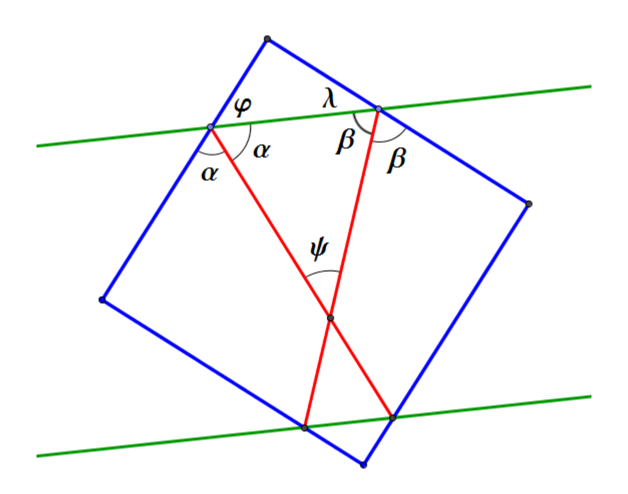


Nota: Considero que la imagen superior muestra pero no demuestra. A falta de algo mejor dejo al lector la construcción rigurosa de la demostración de la igualdad de los ángulos.

De la misma forma se comprueba que los ángulos determinados por el punto A son iguales:



Ahora sólo queda deducir los ángulos interiores:



$$\left.\begin{aligned}\varphi+\lambda&=90\\2\alpha+\varphi&=180\\2\beta+\lambda&=180\\\psi+\alpha+\beta&=180\end{aligned}\right\}$$

$$\varphi=180-2\alpha$$
$$\lambda=180-2\beta$$
$$180-2\alpha+180-2\beta=90\Rightarrow$$
$$-2\alpha-2\beta=90-360\Rightarrow$$
$$-2(\alpha+\beta)=-270\Rightarrow$$
$$\alpha+\beta=135$$
$$\Rightarrow\psi=180-(\alpha+\beta)=180-135=45$$

Fuente de la solución: http://www.mathteacherctk.com/blog/2013/05/a-square-in-parallel-lines/#solution

55.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \\ -(x+1) & x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \end{cases}$$

La ecuación no tiene sentido para $x = -1$pues en este caso $\frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{0}$ no está definido.

Si $x > -1$:

$$|x+1| = x+1$$
$$\frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{x+1}$$
$$\frac{1}{\frac{1}{|x+1|}} = \frac{1}{1} \div \frac{1}{x+1} = x+1$$
$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{|x+1|}}} = \frac{1}{x+1}$$

Y la ecuación queda

$$x+1+\frac{1}{x+1}+x+1+\frac{1}{x+1} = 4$$
$$2x+2+\frac{2}{x+1} = 4$$
$$x+1+\frac{1}{x+1} = 2$$

Multiplicando ambos lados por $x+1$ (estamos suponiendo que $x = -1$)

$$(x+1)^2 + 1 = 2(x+1)$$
$$x^2 + 2x + 1 + 1 = 2x + 2$$
$$x^2 + 2x + 1 + 1 - 2x - 2 = 0$$
$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Si $x < -1$:

$$|x+1| = -(x+1)$$
$$\frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{-(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{|x+1|}}=\frac{1}{1}\div\frac{-1}{x+1}=-(x+1)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{|x+1|}}}}=\frac{1}{-(x+1)}=\frac{-1}{x+1}$$

Y la ecuación queda:

$$-(x+1)-\frac{1}{x+1}-(x+1)-\frac{1}{x+1}=4$$

$$-2(x+1)-\frac{2}{x+1}=4$$

$$-(x+1)-\frac{1}{x+1}=2$$

Multiplicando ambos lados por $x+1$:

$$-(x+1)^2-1=2(x+1)$$

$$-(x^2+2x+1)-1=2x+2$$

$$-x^2-2x-1-1=2x+2$$

$$-x^2-2x-1-1-2x-2=0$$

$$-x^2-4x-4=0\Leftrightarrow x=-2$$

Por lo tanto las soluciones de la ecuación son $x=0$ y $x=-2$

Observación:

Un desarrollo mucho más elegante puede ser realizar la substitución $|x+1|=z$

La ecuación se convierte en

$$z+\frac{1}{z}+\frac{1}{\frac{1}{z}}+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{z}}}=4$$

que es equivalente a

$$z+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{z}=4$$

$$2z+\frac{2}{z}=4$$

$$z+\frac{1}{z}=2$$

$$z^2+1=2z$$

$$z^2+1-2z=0$$

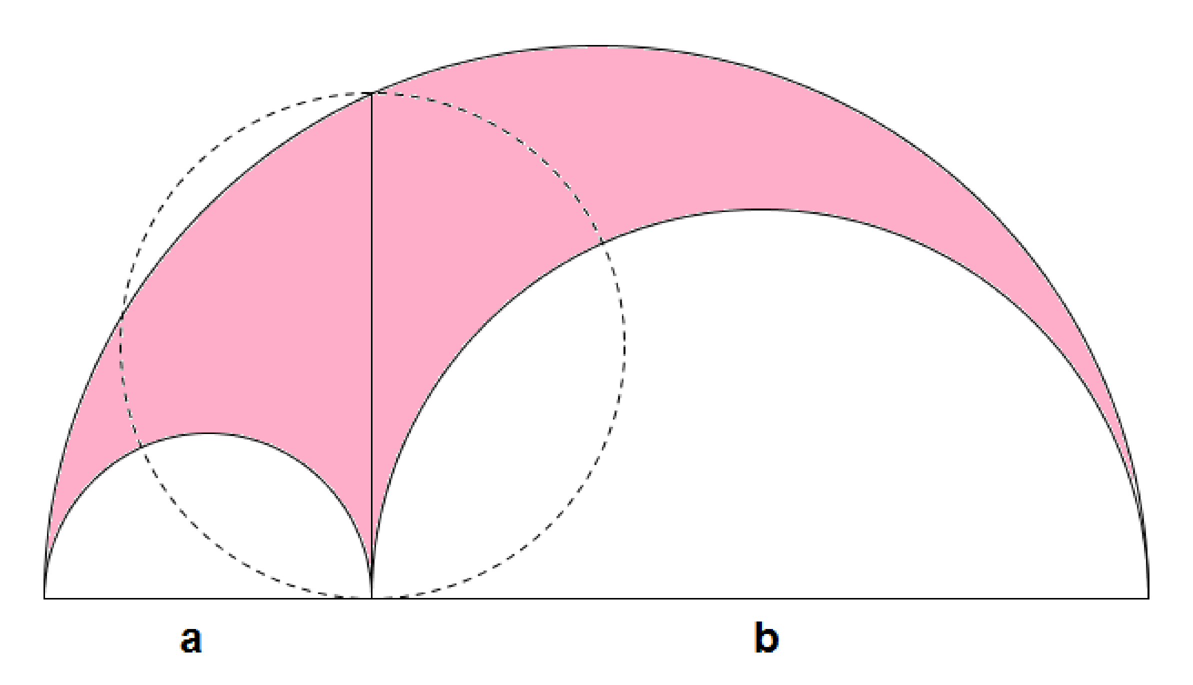
$$z=1$$

Y deshaciendo la substitución:

$$|x+1|=1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1=1 \Leftrightarrow x=0 \\ -(x+1)=1 \Leftrightarrow -x-1=1 \Leftrightarrow x=-2 \end{pmatrix}$$

56.

Sea a el diámetro del círculo blanco pequeño y b el diámetro del círculo blanco grande.



La cicunferencia externa tiene radio $\frac{a+b}{2}$, por lo que el área sombreada será:

$$A_1 = \frac{\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} =$$

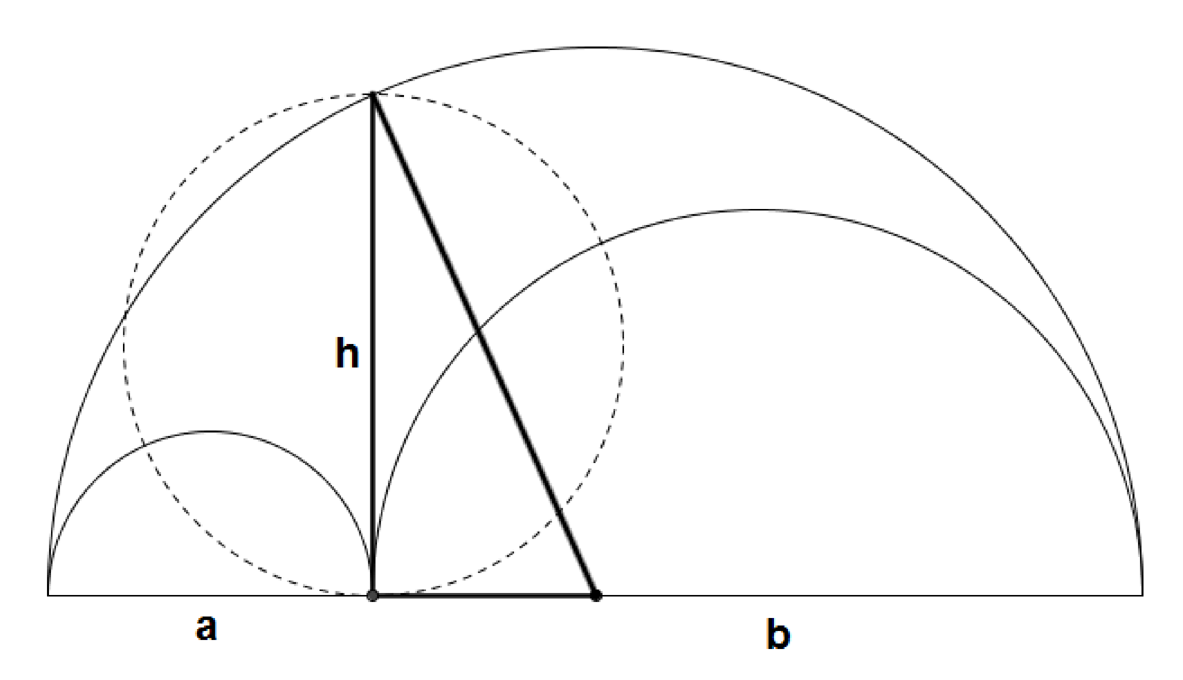
$$= \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{8}(2ab) = \frac{\pi\, a\, b}{4}$$

Para calcular el área del círculo de linea discontínua vemos un triángulo rectánculo



cuya base inferior es $\frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2}$

y su hipotenusa es el radio de la circunferencia exterior: $\frac{a+b}{2}$

Luego su altura será

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{(a+b)^2 - (b-a)^2}{4} =$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + 2ab - \left(a^2 + b^2 - 2ab\right)}{4} =$$
$$= \frac{4ab}{4} = ab$$

Ahora podemos calcular su área:

$$A_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{ab}}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{ab}{4}\right) = \frac{\pi\, a\, b}{4}$$

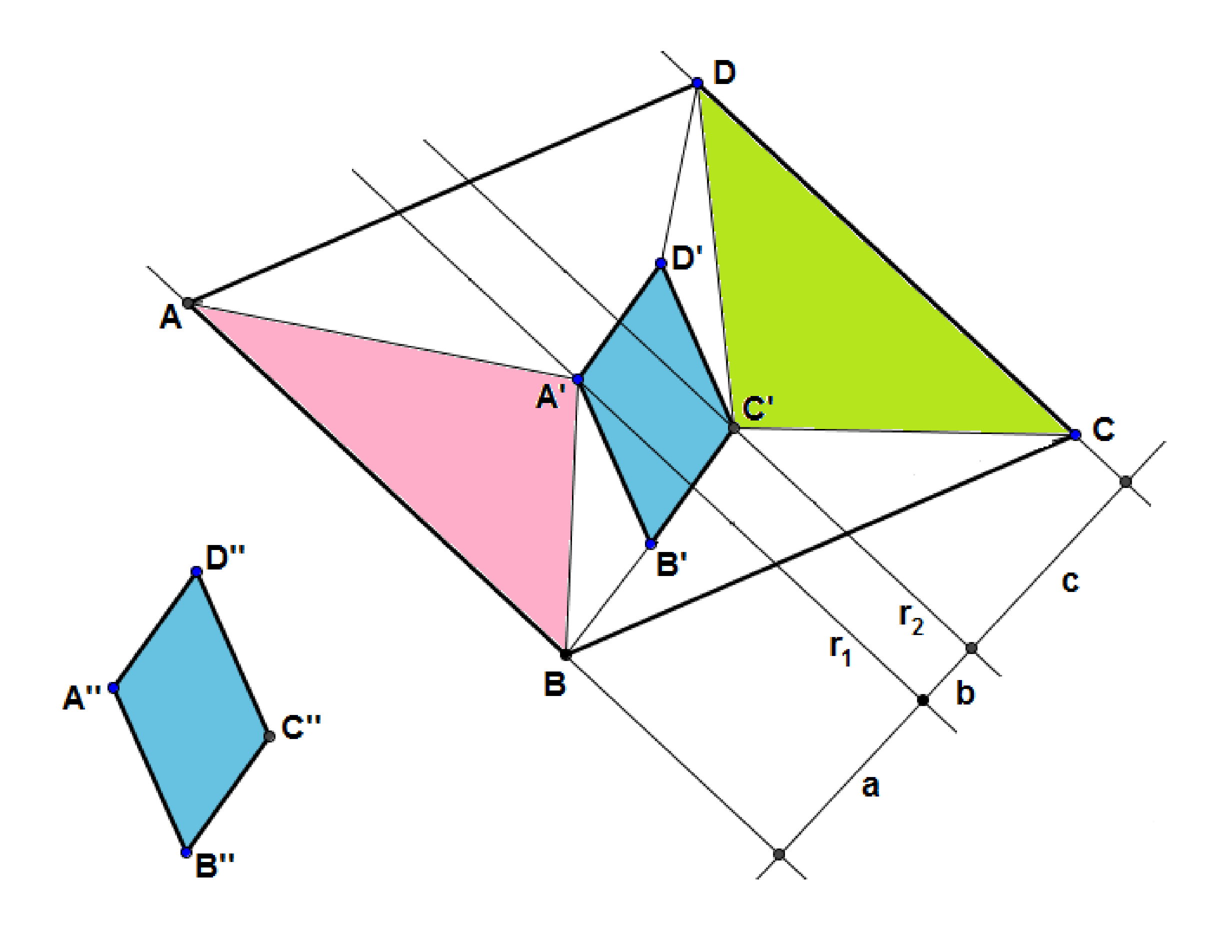
Así pues $A_1 = A_2$, tienen la misma área.

57.

Veamos que la suma de las áreas de los triángulos ABA’ + CDC’ no depende de la posición del paralelogramo interior:

Lanzamos la paralela r_1 a AB por A’ y la paralela r_2 por C’ a CD.

Sea a la distancia de AB a A’ y c la distancia de CD a C’. Sea b la distancia entre las rectas r_1 y r_2.



Claramente $t = a + b + c$ es la distancia entre AB y CD y no depende de la posición del paralelogramo azul, por lo que $a + c = t - b$ tampoco depende de la posición del paralelogramo azul.

$$ABA' + CDC' = \frac{AB \cdot a}{2} + \frac{CD \cdot c}{2} = \quad (AB = CD)$$

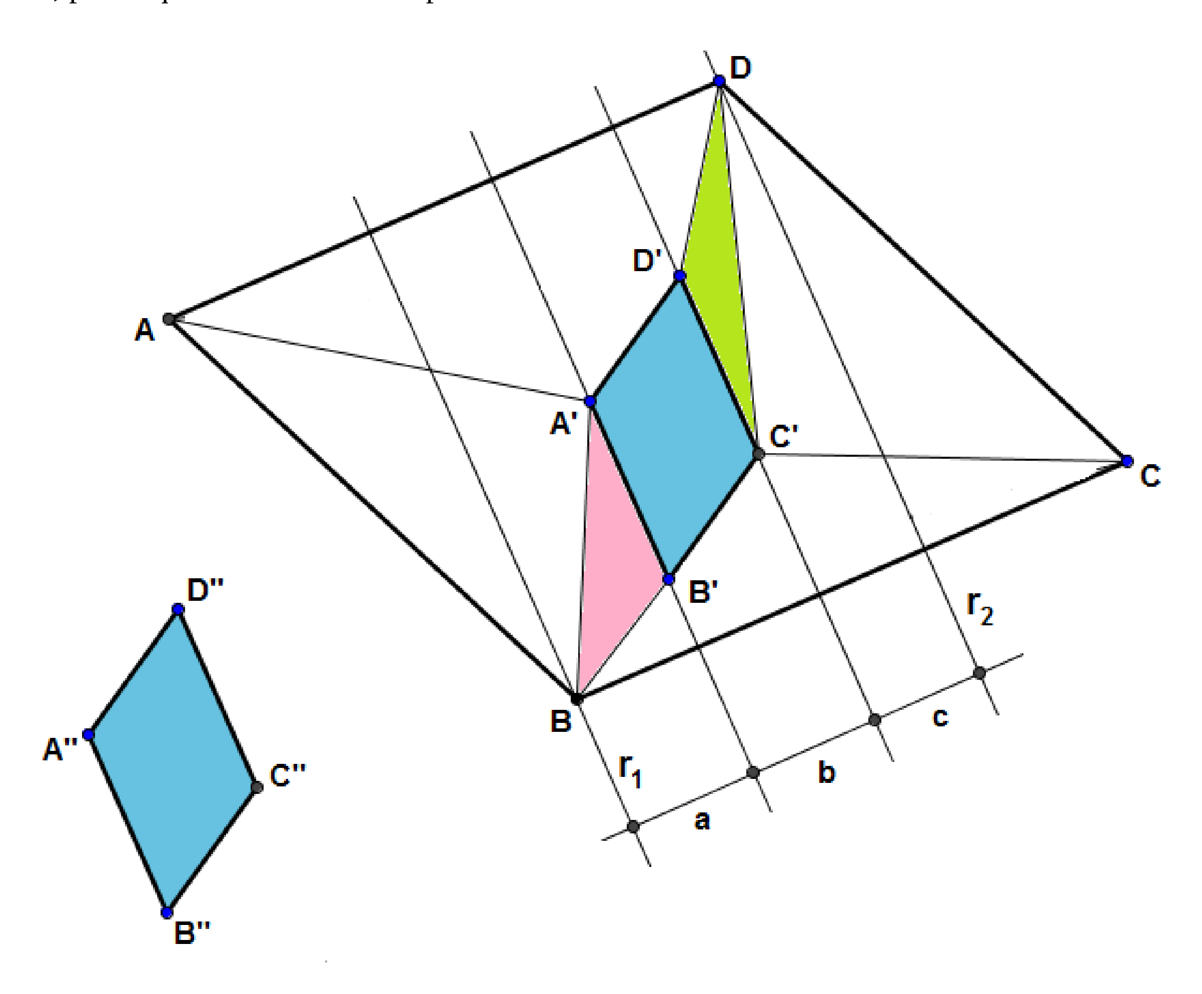
$$= \frac{1}{2}(AB \cdot a + AB \cdot c) =$$

$$= \frac{AB}{2}(a + c) = \frac{AB}{2}(t - b)$$

no depende de la posición del paralelogramo azul.

De forma similar podemos ver que la suma de las áreas de los triángulos BB’A’ y C’DD’ no depende de la posición del paralelogramo azul.

Sea ahora r_1 la paralela a A’B’ que pasa por B y r_2 la paralela a C’D’ que pasa por D. Sea a la distancia de B a A’B’, b la distancia entre A’B’ y C’D’ y c la distancia de D a C’D’.
Claramente $t = a + b + c$ no depende de la posición del paralelogramo azul, ni tampoco b, por lo que $a + c = t - b$ tampoco.



$$BB'A' + C'DD' = \frac{A'B' \cdot a}{2} + \frac{C'D' \cdot c}{2} = \quad (A'B' = C'D')$$

$$= \frac{1}{2}\left(A'B' \cdot a + A'B' \cdot c\right) =$$

$$= \frac{A'B'}{2}\left(a + c\right) = \frac{A'B'}{2}\left(t + b\right)$$

no depende de la posición del paralelogramo azul.

58.

Podemos calcular todos estos números uno a uno ordenándolos por su cifra inicial, y deducir las dos cifras que faltan. Hemos de tener en cuenta que la mayoría son dobles (por ejemplo 461 y 416) pero algunos no (por ejemplo 722)

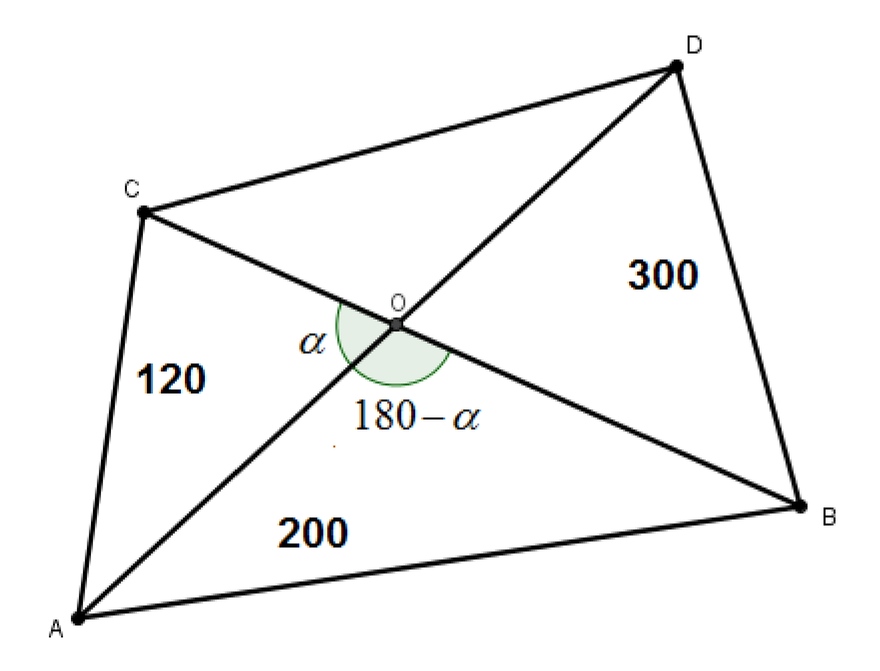
9 >	911	920 x2			
8 >	830 x2	821 x2			
7 >	740 x2	731 x2	722		
6 >	650 x2	641 x2	632 x2		
5 >	560 x2	551 x2	542 x2	533	
4 >	470 x2	461 x2	452 x2	443 x2	
3 >	380 x2	371 x2	362 x2	353 x2	344
2 >	290 x2	281 x2	272 x2	263 x2	254 x2
1 >	191 x2	182 x2	173 x2	164 x2	155

En total 28*2+5 = 61 números.

59.

Sea O el punto de intersección de las dos diagonales.

Sea $\alpha = \angle COA = \angle DOB$, por tanto $180 - \alpha = \angle AOB = \angle COD$



Los cuatro ángulos tienen el mismo seno: $\sin(\alpha) = \sin(180 - \alpha)$

Ahora aplicamos la fórmula del ángulo determinado por dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

$$2A = |\vec{v}||\vec{w}|\sin(\alpha)$$

Por lo tanto:

$$120 \cdot 2 = OC \cdot OA \cdot |\sin(\alpha)| \Rightarrow OC = \frac{240}{\cdot OA \cdot |\sin(\alpha)|}$$

$$200 \cdot 2 = OA \cdot OB \cdot |\sin(180 - \alpha)| = OA \cdot OB \cdot |\sin(\alpha)|$$

$$300 \cdot 2 = OD \cdot OB \cdot |\sin(\alpha)| \Rightarrow OD = \frac{600}{OB \cdot |\sin(\alpha)|}$$

$$2\acute{A}rea = OC \cdot OD \cdot |\sin(\alpha)| = OC \cdot \frac{600}{OB \cdot |\sin(\alpha)|} \cdot |\sin(\alpha)| =$$

$$= OC \cdot \frac{600}{OB} = \frac{240}{\cdot OA \cdot |\sin(\alpha)|} \cdot \frac{600}{OB} = \frac{240 \cdot 600}{\cdot OA \cdot OB \cdot |\sin(\alpha)|} = \frac{240 \cdot 600}{400} = 360$$

$$\Rightarrow \acute{A}rea = 180$$

60.

Demostraremos la igualdad por inducción en n:

Para $n=3$:

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{n-1}{n+1}$$

Para $n=4$:

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}=\frac{n-1}{n+1}$$

Veamos que, si es cierto para n, entonces también lo es para $n+1$:

Queremos demostrar que

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+...+n}+\frac{1}{1+2+3+...+n+n+1}=\frac{n+1-1}{n+1+1}=\frac{n}{n+2} \quad (*)$$

Suponemos que es cierto para n, por lo tanto:

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+...+n}=\frac{n-1}{n+1}$$

Así que substituimos la igualdad anterior en la primera parte de (*), i aplicamos la igualdad $1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+...+n}+\frac{1}{1+2+3+...+n+n+1}=$$
$$=\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{1+2+3+...+n+n+1}=\frac{n-1}{n+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n-1}{n+1}+\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{2}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{(n-1)(n+2)+2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+n-2+2}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n^2+n}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n}{(n+2)}$$

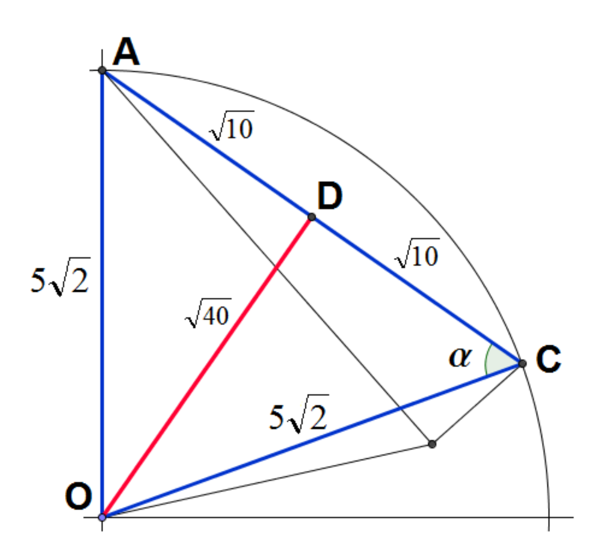
tal y como queríamos comprobar.

Observación: Otra versión de esta demostración la podemos encontrar en:
http://www.i-precalculus.com/2015/04/prove-by-induction.html

61.

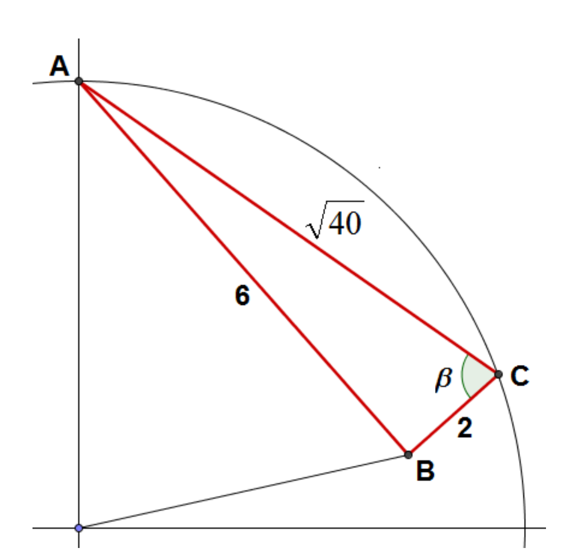
Claramente $AC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ por Pitágoras.

Calculamos el ángulo $\alpha = \angle ACO$ teniendo en cuenta que el triángulo ACO es isósceles, por lo que su altura que pasa por O lo divide en dos triángulos rectángulos. Por Pitágoras la altura OD mide $OD = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{25 \cdot 2 - 10} = \sqrt{40}$



$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{40}}{5\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

De la misma altura calculamos las razones trigonométricas de β:



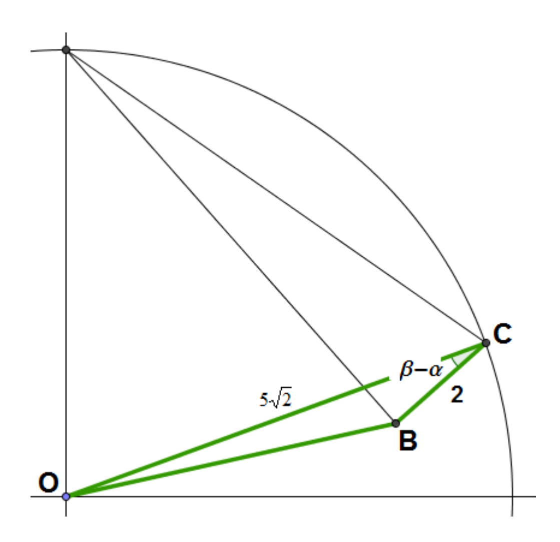
$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \sin\beta = \frac{6}{\sqrt{40}} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ahora aplicamos la identidad del coseno de la diferencia:

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos(\beta)\cos(\alpha)+\sin(\beta)\sin(\alpha)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{5}}+\frac{6}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{7}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

Y por último aplicamos el **teorema del coseno** para calcular OB:



$$OB^2=OC^2+BC^2-2\cdot OC\cdot OB\cos(\beta-\alpha)=$$

$$=\left(5\sqrt{2}\right)^2+2^2-2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}=50+4-28=26$$

$$\Rightarrow OB=\sqrt{26}\approx 5.099$$

62.

- Primera versión (una solución “constructiva”):

En primer lugar demostramos que todo entero positivo tiene un múltiplo que acaba en cada uno de los diez dígitos, por separado:

Si acaba en 1,

1×0=0, 1×1=1, 1×2=2, 1×3=3, 1×4=4, 1×5=5, 1×6=6, 1×7=7, 1×8=8, 1×9=9

y tenemos todas las posibilidades.

De la misma forma se verifica si acaba en 3, 7 o 9:

3×0=0, 3×1=3, 3×2=6, 3×3=9, 3×4=1**2**, 3×5=1**5**, 3×6=1**8**, 3×7=2**1**, 3×8=2**4**, 3×9=2**7**
7×0=0, 7×1=7, 7×2=14, 7×3=21, 7×4=28, 7×5=35, 7×6=42, 7×7=49, 7×8=56, 7×9=63
9×0=0, 9×1=9, 9×2=18, 9×3=27, 9×4=36, 9×5=45, 9×6=54, 9×7=63, 9×8=72, 9×9=81

Si acaba en 5 es múltiple de 5 por lo que podemos dividirlo entre 5 sucesivamente hasta que acaben en otra cifra distinta.

Si acaba en par podemos dividirlo entre 2 hasta que acabe en impar o cero.

Si acaba en 0 podemos dividirlo entre 10 hasta que acabe en otra cifra que no sea 0.

Dado un número n, sea k_1 tal que k_1×n acaba en 1, y sea d_1 el número de dígitos de k_1×n.

Sea k_2 tal que k_2×n acaba en 2, y d_2 el número de dígitos de k_2×n.

Entonces el número $k_2 \cdot 10^{d_1} + k_1$ cumple que

$\left(k_2 \cdot 10^{d_1} + k_1\right) n = k_2 \cdot n 10^{d_1} + k_1 n$ incluye los dígitos 1 y 2.

De esta manera podemos ir construyendo un número

$k_9 \cdot 10^{d_9} + k_8 \cdot 10^{d_8} + \ldots + k_2 \cdot 10^{d_1} + k_1$

para el cual su producto con n incluye todos los 10 dígitos.

-Segunda versión.

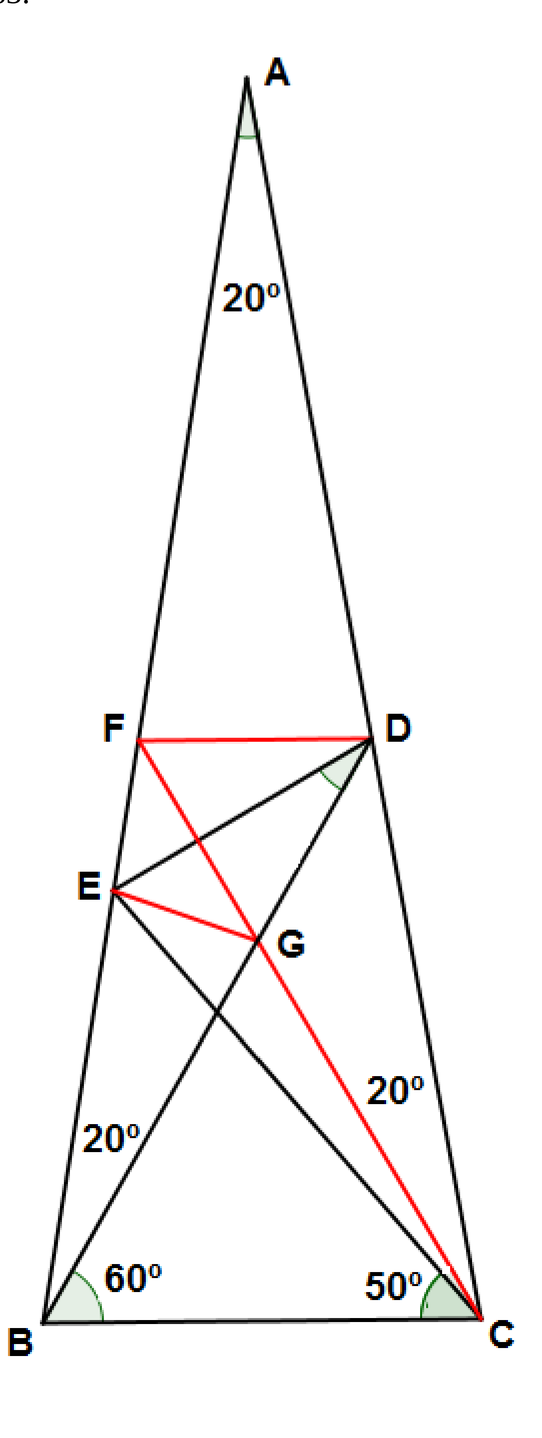
Una forma mucho más elegante de encontrar este múltiple se basa en el hecho de que, para cualquier número n, y para cualquier $k > n$, entre los números k, $k+1$, $k+2$, ... , $k+n-1$ podemos encontrar un múltiplo de n.
Sea pues un número n sea q tal que $10^q > n$. Entonces entre los números $1234567890 \cdot 10^q$, $1234567890 \cdot 10^q + 1$, $1234567890 \cdot 10^q + 2$,...,

$1234567890 \cdot 10^q + n - 1$ seguro que encontramos un múltiple de n, y todos estos números contienen todos los dígitos del 0 al 9.

Fuente de la segunda versión: **Math Problem Book I** compiled by Kin Y. Li, Hong Kong Mathematical Society.

www.toomates.net/Llistes/a2015/mai/Math_Problem_Book_I_Kin_Y_Li.pdf

63.



Puesto que el triángulo ABC es isósceles en A, ABC = BCA = 80º. Dibujamos la recta CF tal que BCF=60º, determinando los triángulos equiláteros BCG y GFD.

BCG es equilátero puesto que sus tres ángulos son iguales, luego BC=BG. El ángulo BEC = 180º-50º-80º=50º luego el triángulo BCE es isósceles, luego BE=BC. Por lo tanto BE=BG y el triángulo BEG es isósceles, de lo que deducimos el ángulo EGB=(180-20)/2=80º.

BDC=180º-60º-60º=40º, luego CGD=180º-40º-20º=120º, FGB=CGD=120º luego FGE=FGB-EGB=120º-80º=40º.

El ángulo EFG=180º-60º-60º=40º, luego el triángulo EFG es isósceles y por lo tanto EF=EG. FD=FG por ser el triángulo GFD equilátero, así pues EDG=FDG/2=60º/2=30º.

Fuente de la solución: http://kvant.mccme.ru/1993/06/istoriya_s_geometriej.htm

Más información: http://www.cut-the-knot.org/triangle/80-80-20/

64.

Desarrollamos el polinomio $(a+b+c)^3$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$$

Si $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ entonces $3ab^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc = 0$

Pero esta última igualdad la podemos escribir como

$$0 = 3ab^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc = 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

Luego $(a+b)(a+c)(b+c) = 0$. Por lo tanto $a = -b$ o $a = -c$ o $b = -c$.

Supongamos que $a = -b$.

Entonces

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^5 = (-b+b+c)^5 = c^5 = \\
&= c^5 + a^5 - a^5 = c^5 + a^5 + (-a)^5 = \\
&= c^5 + a^5 + (-a)^5 = c^5 + a^5 + (b)^5 = c^5 + a^5 + b^5
\end{aligned}$$

De la misma manera llegamos al resultado deseado si suponemos $a = -c$ o $b = -c$.

Fuente de la solución: Quora.com (Héctor Martín Peña Pollastri)
http://www.quora.com/If-a-%2Bb%2Bc-3-a-3-%2B-b-3-%2B-c-3-how-can-I-prove-a%2Bb%2Bc-5-a-5-%2B-b-5-%2B-c-5

65.

$$0 = x^2 0 = x^2(x+y+z) = x^3 + x^2 y + x^2 z \Rightarrow x^2 y + x^2 z = -x^3 \Rightarrow 3x^2 y + 3x^2 z = -3x^3$$
$$0 = y^2 0 = y^2(x+y+z) = y^2 x + y^3 + y^2 z \Rightarrow -y^3 = y^2 x + y^2 z \Rightarrow -3y^3 = 3y^2 x + 3y^2 z$$
$$0 = z^2 0 = z^2(x+y+z) = z^2 x + z^2 y + z^3 \Rightarrow -z^3 = z^2 x + z^2 y \Rightarrow -3z^3 = 3z^2 x + 3z^2 y$$

Desarrollamos el cubo de la suma:

$$0 = 0^3 = (x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3x^2 y + 3xy^2 + 3x^2 z + 3y^2 z + 3xz^2 + 3yz^2 =$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3x^2 y + 3x^2 z + 3y^2 x + 3y^2 z + 3z^2 x + 3z^2 y =$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3 =$$
$$= -2x^3 + -2y^3 + -2z^3 + 6xyz$$

Luego

$$0 = -2x^3 + -2y^3 + -2z^3 + 6xyz \Rightarrow$$
$$6xyz = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 \Rightarrow$$
$$3xyz = x^3 + y^3 + z^3$$

Como queríamos demostrar.

Nota: José Lorenzo en http://joselorlop.blogspot.com.es/2015/05/448-solucion-de-148-la-equis-la-ye-y-la.html

Nos ofrece una solución mucho más rápida, en una sola línea:

$$-z^3 = (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2 y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = x^3 + y^3 - 3xyz$$

66.

Por **teorema de Pitágoras** tenemos que

$$6^2 + BC^2 = AC^2 \quad (1)$$

y también que

$$6^2 + 8^2 = AD^2$$

De donde deducimos que $AD^2 = 100 \Rightarrow AD = 10$.

Por el **teorema de la Bisectriz** tenemos que $\frac{BC}{CD} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5BC = 3CD \quad (2)$

Pero puesto que $BC + CD = 8 \Rightarrow CD = 8 - BC$

y por tanto

$$(2) \Rightarrow 5BC = 3(8 - BC) = 24 - 3BC \Rightarrow 8BC = 24 \Rightarrow BC = 3$$

Por último

$$(1) \Rightarrow AC^2 = 36 + BC^2 = 36 + 3^2 = \Rightarrow AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \cong 6.71$$

b) Al ser un triángulo rectángulo, tomamos como altura BC y por tanto

$$Área\ ABC = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

De la misma forma podemos calcular el área del triángulo ACD:

$$CD = 8 - BC = 8 - 3 = 5$$

$$Área\ ACD = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

67.

Sea $\beta = \angle BAD = \angle DAC$

Aplicamos la propiedad de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º.

Entonces $\alpha + \beta + 75 = 180$ y $(180 - \alpha) + \beta + 65 = 180$

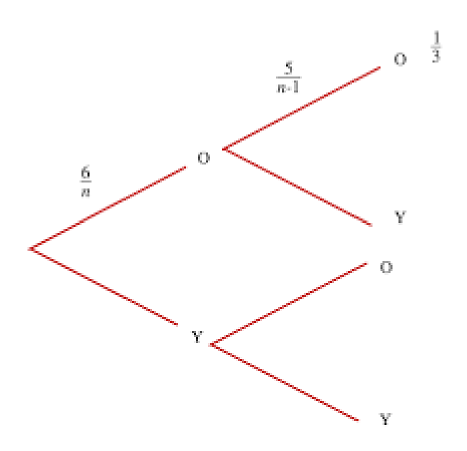
Por lo que nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 75 = 180 \\ (180 - \alpha) + \beta + 65 = 180 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $\alpha = 85^{o}$ y $\beta = 20^{o}$.

68.

Es un ejercicio de probabilidad condicionada:



$$P(O_1O_2) = P(O_1) \cdot P(O_2 \mid O_1)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{6}{n} \cdot \frac{5}{n-1}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{30}{n(n-1)}$$

$$n(n-1) = 90$$

$$n^2 - n = 90$$

Nota: Las posibles soluciones son n=-9 y n=10, de las cuales n=10 es la única aceptable.

69.

Sea $\alpha = \angle DOE$, $b = OB$, $c = OC$. Escribiremos $x = OA$ en función de α, b y c. Aplicamos el teorema del coseno dos veces:

$$AB^2 = x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha) \Rightarrow AB = \sqrt{x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)}$$
$$AC^2 = x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha) \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)}$$

Luego

$$d(x) = AB + AC = \sqrt{x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)} + \sqrt{x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)}$$

Para determinar su mínimo derivaremos la función e igualaremos la derivada a 0:

$$d'(x) = \frac{2x - 2b\cos(\alpha)}{2\sqrt{x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)}} + \frac{2x - 2c\cos(\alpha)}{2\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)}} =$$
$$= \frac{x - b\cos(\alpha)}{\sqrt{x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)}} + \frac{x - c\cos(\alpha)}{\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)}}$$
$$\frac{x - b\cos(\alpha)}{\sqrt{x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)}} + \frac{x - c\cos(\alpha)}{\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)}} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x - b\cos(\alpha)}{\sqrt{x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)}} = -\frac{x - c\cos(\alpha)}{\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)}}$$

Elevando al cuadrado ambos términos:

$$\frac{[x - b\cos(\alpha)]^2}{x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)} = \frac{[x - c\cos(\alpha)]^2}{x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)}$$

Multiplicando en cruz:

$$[x - b\cos(\alpha)]^2\left(x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)\right) = [x - c\cos(\alpha)]^2\left(x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)\right) \Leftrightarrow$$
$$[x - b\cos(\alpha)]^2\left(x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)\right) - [x - c\cos(\alpha)]^2\left(x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)\right) = 0$$

Desarrollamos por separado:

$$A = [x - b\cos(\alpha)]^2\left(x^2 + c^2 - 2cx\cos(\alpha)\right) =$$
$$= c^2x^2 + x^4 - 2bc^2x\cos(\alpha) - 2bx^3\cos(\alpha) - 2cx^3\cos(\alpha) + b^2c^2\cos(\alpha)^2 +$$
$$+ b^2x^2\cos(\alpha)^2 + 4bcx^2\cos(\alpha)^2 - 2b^2cx\cos(\alpha)^3$$

$$B = [x - c\cos(\alpha)]^2\left(x^2 + b^2 - 2bx\cos(\alpha)\right) =$$
$$= b^2x^2 + x^4 - 2b^2cx\cos(\alpha) - 2bx^3\cos(\alpha) - 2cx^3\cos(\alpha) + b^2c^2\cos(\alpha)^2 +$$
$$+ 4bcx^2\cos(\alpha)^2 + c^2x^2\cos(\alpha)^2 - 2bc^2x\cos(\alpha)^3$$

Cancelamos términos iguales:

$$A-B=c^2x^2-2bc^2x\cos(\alpha)+b^2x^2\cos(\alpha)^2-2b^2cx\cos(\alpha)^3-b^2x^2+$$
$$+2b^2cx\cos(\alpha)-c^2x^2\cos(\alpha)^2+2bc^2x\cos(\alpha)^3$$

Simplificamos dividiendo todo entre x (suponemos que $x=OA\neq 0$)

$$A-B=c^2x-2bc^2\cos(\alpha)+b^2x\cos(\alpha)^2-2b^2c\cos(\alpha)^3-b^2x+$$
$$+2b^2c\cos(\alpha)-c^2x\cos(\alpha)^2+2bc^2\cos(\alpha)^3$$

Es una ecuación lineal en x:

$$A-B=0\Leftrightarrow$$
$$\left(c^2+b^2\cos(\alpha)^2-b^2-c^2\cos(\alpha)^2\right)x-2bc\cos(\alpha)\left(c+b\cos(\alpha)^2-b-c\cos(\alpha)^2\right)=0\Leftrightarrow$$
$$x=\frac{2bc\cos(\alpha)\left(c+b\cos(\alpha)^2-b-c\cos(\alpha)^2\right)}{c^2+b^2\cos(\alpha)^2-b^2-c^2\cos(\alpha)^2}=(*)$$

$$c^2+b^2\cos(\alpha)^2-b^2-c^2\cos(\alpha)^2=c^2-b^2+\left(b^2-c^2\right)\cos(\alpha)^2=$$
$$=(c+b)(c-b)+(b+c)(b-c)\cos(\alpha)^2=(c+b)\left[(c-b)+(b-c)\cos(\alpha)^2\right]$$

$$(*)=\frac{2bc\cos(\alpha)\left(c-b+(b-c)\cos(\alpha)^2\right)}{(c+b)\left[(c-b)+(b-c)\cos(\alpha)\right]}=\frac{2bc\cos(\alpha)}{b+c}$$

Falta por justificar que efectivamente el punto anterior es un mínimo relativo. Se puede hacer viendo que la función $d'(x)=A-B$ es una función lineal $mx+n$ con pendiente $m=c^2+b^2\cos(\alpha)^2-b^2-c^2\cos(\alpha)^2$ positiva:

$$m=c^2-b^2+\left(b^2-c^2\right)\cos(\alpha)^2=(c+b)(c-b)+(b+c)(b-c)\cos(\alpha)^2=$$
$$=(c+b)\left[(c-b)+(b-c)\cos(\alpha)^2\right]$$

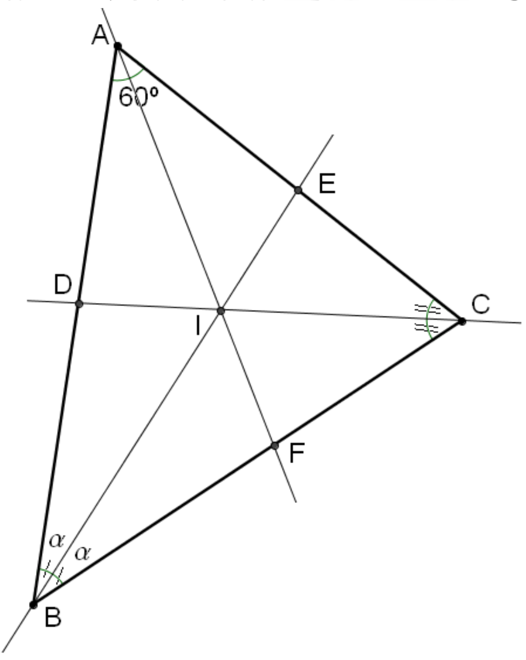
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el punto C está a la derecha del punto B, es decir, $c-b>0$

$$0<\cos(\alpha)^2<1\Rightarrow$$
$$\left|(b-c)\cos(\alpha)^2\right|=\left|(c-b)\cos(\alpha)^2\right|<c-b\Rightarrow$$
$$(c-b)+(b-c)\cos(\alpha)^2>0\Rightarrow$$
$$m=(c+b)\left[(c-b)+(b-c)\cos(\alpha)^2\right]>0$$

Luego alrededor del punto crítico anterior la derivada pasa de negativa (función decreciente) a positiva (función creciente), luego se trata efectivamente de un mínimo relativo.

70.

Lanzamos la tercera bisectriz AF. Claramente $\angle DAI = \angle IAE = 30º$.



La mayoría de los ángulos quedan determinados por $\alpha = \angle IBF$:

$2\alpha + 2\angle FCI + 60º = 180º \Rightarrow \angle FCI = 60 - \alpha$

$\angle BIC + \alpha + \angle FCI = 180º \Rightarrow \angle BIC + \alpha + 60º - \alpha = 180º \Rightarrow \angle BIC = 120º$

$\angle BIC = 120º \Rightarrow \begin{cases} \angle DIE = 120º \\ \angle EIC = \angle DIB = 60º \end{cases}$

$\angle EIC + \angle IEC + \angle ECI = 180º \Rightarrow$

$180º = 60º + \angle IEC + \angle ICF = 180º = 60º + \angle IEC + 60º - \alpha \Rightarrow$

$\angle IEC = 60º + \alpha \Rightarrow$

$\angle AEI = 180º - \angle IEC = 120º - \alpha$

De la misma manera se comprueba que $\angle ADI = 60º + \alpha$

Por lo tanto

$\angle AEI = 120º - \alpha = 180º - (60º + \alpha) = 180º - \angle ADI \Rightarrow$

$\sin(\angle AEI) = \sin(\angle ADI)$

Aplicamos el teorema del seno dos veces:

$$\frac{DI}{\sin(\angle DAI)} = \frac{AI}{\sin(\angle ADI)} = \frac{AI}{\sin(\angle AEI)} = \frac{EI}{\sin(\angle IAE)}$$

Puesto que $\angle DAI = \angle IAE = 30º \Rightarrow \sin(\angle DAI) = \sin(\angle IAE)$

De las dos igualdades anteriores deducimos que $DI = EI$.

Nota: En la página web
http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/TriangleWith60degAngle.shtml

podemos encontrar una solución alternativa muy corta mediante polígonos cíclicos.

71.

Sea $\alpha = \angle CAB$. Luego $\angle ABC = 90º - \alpha$.

Si MB=CB entonces el triángulo MBC es isósceles en B por lo tanto $\angle MCB = \angle CMB$. Además se cumple $2\angle MCB + \angle CBM = 180º$ y $\angle CBM = \angle ABC = 90º - \alpha$, luego $\angle MCB = 45º + \frac{\alpha}{2}$.

De la misma manera: El triángulo ANC es isósceles en A, luego $\angle ACN = \angle ANC$ y además $2\angle ACN + \angle CAN = 180º$, pero $\angle CAN = \alpha$ de lo que deducimos que $\angle ACN = 90º - \frac{\alpha}{2}$

Por ser el triángulo ACB rectángulo en C:

$$90º = \angle ACB = \angle ACN + \angle MCB - \angle MCN$$

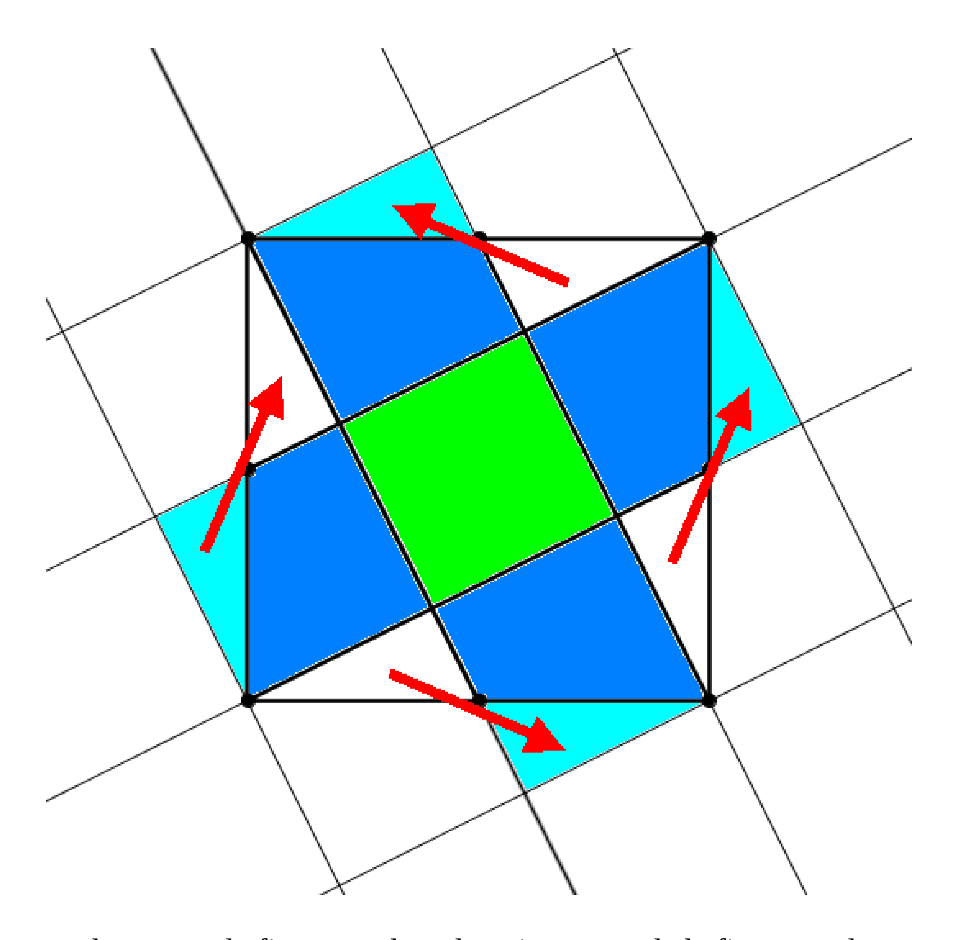
$$90º = 90º - \frac{\alpha}{2} + 45º + \frac{\alpha}{2} - \angle MCN$$

$$0 = 45º - \angle MCN$$

$$45º = \angle MCN$$

72.

Vemos que recombinando las piezas del cuadrado grande podemos construir una figura equivalente con cinco cuadrados iguales:



Por lo tanto, claramente la figura verde es la quinta parte de la figura total.

73.

$\angle DEA = \angle CEB = 78º$ por ser ángulos opuestos por el vértice.
$\angle DAE = 180º - \angle ADE - \angle DEA = 180º - 65º - 78º = 37º$

Ahora $\angle EBC = \angle DAE = 37º$ porque el cuadrilátero ABCD está inscrito en una circunferencia (“cuadrilátero cíclico”), por lo que el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal.

74.

Una sesión con Mathematica nos permite jugar con el producto de los dos polinomios y nos pone sobre la pista del valor de m buscado:

```
In[1]:= p[x_] = x^2 + a*x + b

Out[1]= b + a x + x^2

In[2]:= Expand[p[n]*p[n + 1]]

Out[2]= b + a b + b^2 + a n + a^2 n + 2 b n + 2 a b n + n^2 + 3 a n^2 + a^2 n^2 + 2 b n^2 + 2 n^3 + 2 a n^3 + n^4

In[3]:= % - b

Out[3]= a b + b^2 + a n + a^2 n + 2 b n + 2 a b n + n^2 + 3 a n^2 + a^2 n^2 + 2 b n^2 + 2 n^3 + 2 a n^3 + n^4

In[4]:= Factor[%]

Out[4]= (b + n + a n + n^2) (a + b + n + a n + n^2)
```

Así pues,

$$p(n)\cdot p(n+1)-b=(b+n+an+n^2)(a+b+n+an+n^2)$$

Tomando $m=b+n+an+n^2$, que claramente es un entero

$$p(n)\cdot p(n+1)-b=m(a+m)=m^2+am\Rightarrow$$
$$p(n)\cdot p(n+1)=m^2+am+b=f(m)$$

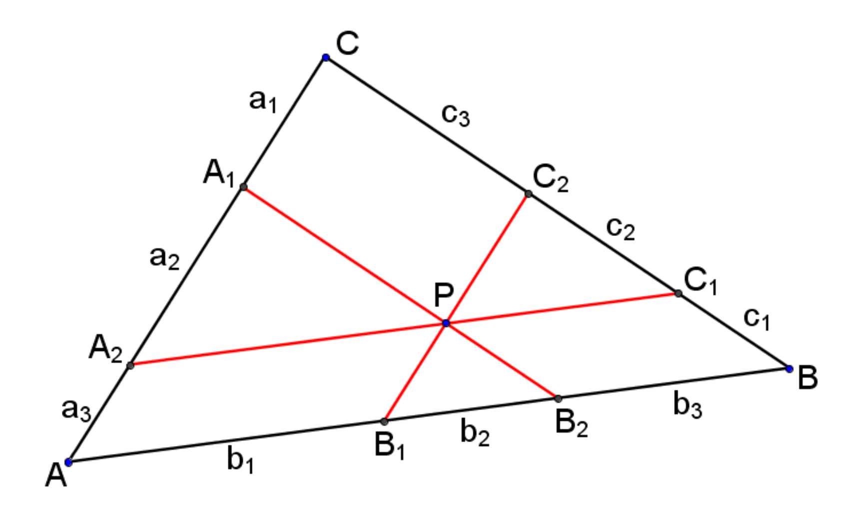
por lo que cumple las condiciones deseadas.

Nota: En la página web http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/PropertyOfQuadraticPolynomials.shtml

podemos encontrar una solución alternativa mediante la factorización de p(x).

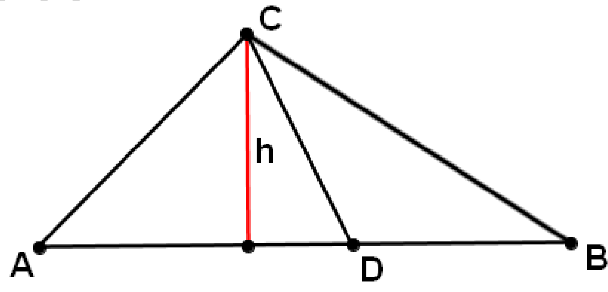
75.

En primer lugar asignamos nombre a los puntos de intersección:



Denotamos por $[ABC]$ el área del triángulo ABC y, de la misma manera, por $[ABCD]$el área del cuadrilátero ABCD.

Aprovechamos la propiedad de que en triángulos con la misma altura las áreas son propoporcionales a las bases:



$[ADC] = \overline{AD} \cdot h/2$

$[DBC] = \overline{DB} \cdot h/2$

$$\frac{[ADC]}{[DBC]} = \frac{\overline{AD} \cdot h/2}{\overline{DB} \cdot h/2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

Aplicamos este resultado a nuestro caso:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{[CPA_1]}{[A_1PA_2]} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{[APA_2]}{[B_1PB_2]} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{[BPC_1]}{[C_1PC_2]}$$

Aprovechamos también que todo paralelogramo se puede descomponer mediante su diagonal en dos triángulos iguales, luego:

$[CPA_1] = \frac{1}{2}[CC_2PA_1] = \frac{1}{2}2[PC_2A_1] = [PC_2A_1]$, y de la misma manera:

$[APB_1] = [PC_1B_2]$ y $[BPC_1] = [PB_1A_2]$

Así pues:

$$\frac{a_1}{a_2}\frac{b_1}{b_2}\frac{c_1}{c_2}=\frac{[CPA_1]}{[A_1PA_2]}\frac{[APA_2]}{[B_1PB_2]}\frac{[BPC_1]}{[C_1PC_2]}=\frac{[PC_2A_1]}{[A_1PA_2]}\frac{[PC_1B_2]}{[B_1PB_2]}\frac{[PB_1A_2]}{[C_1PC_2]}=(*)$$

Utilizamos ahora la fórmula del área del triángulo mediante el seno de uno de sus ángulos:

$$(*)=\frac{\overline{PA_1}\cdot\overline{PC_2}\sin(\angle A_1PC_2)\cdot\overline{PC_1}\cdot\overline{PB_2}\cdot\sin(\angle C_1PB_2)\cdot\overline{PA_2}\cdot\overline{PB_1}\cdot\sin(\angle A_2PB_1)}{\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}\sin(\angle A_1PA_2)\cdot\overline{PC_2}\cdot\overline{PC_1}\cdot\sin(\angle C_2PC_1)\cdot\overline{PB_2}\cdot\overline{PB_1}\cdot\sin(\angle B_1PB_2)}=1$$

Todos los elementos de esta división se cancelan uno a uno, teniendo en cuenta que $\angle A_1PC_2=\angle B_1PB_2$, $\angle C_1PB_2=\angle A_1PA_2$ y $\angle A_2PB_1=\angle C_2PC_1$, por ser ángulos opuestos por el vértice. Así pues

$$\frac{a_1}{a_2}\frac{b_1}{b_2}\frac{c_1}{c_2}=1\Rightarrow a_1\cdot b_1\cdot c_1=a_2\cdot b_2\cdot c_2$$

De la misma manera se demuestra que $a_2\cdot b_2\cdot c_2=a_3\cdot b_3\cdot c_3$

Nota: Una solución alternativa mucho más sencilla, mediante semejanza de triángulos, se puede encontrar en http://www.cut-the-knot.org/triangle/PleasantProportionsInTriangle.shtml

76.

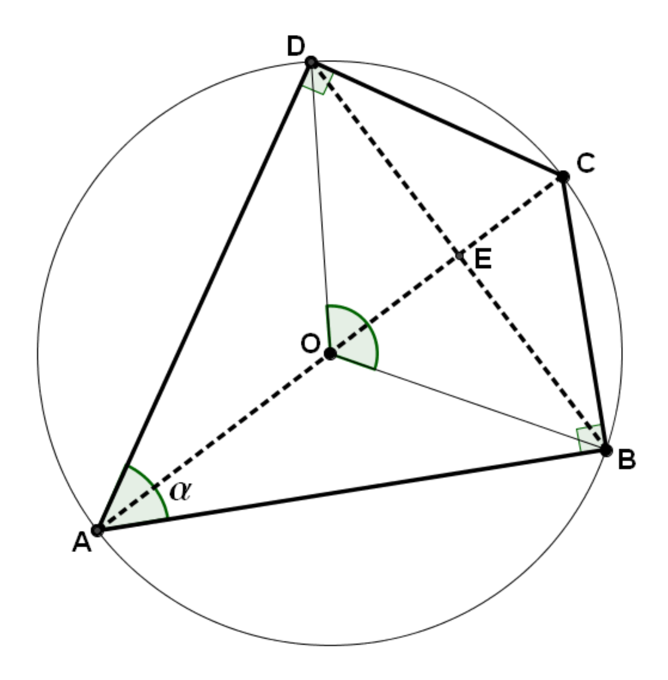
El cuadrilátero es cíclico, pues claramente tiene las sumas de los ángulos opuestos son las dos de 180º:

$\angle ADC + \angle ABC = 90º + 90º = 180º$

y también

$$\angle DAC + 90 + \angle DCA = 180º \Rightarrow$$
$$\angle DAC = 90º - \angle DCA \Rightarrow$$
$$\angle DAB = 2\angle DAC = 2(90º - \angle DCA) = 180º - 2\angle DCA = 180º - \angle DCB \Rightarrow$$
$$\angle DAB + \angle DCB = 180º$$

Por lo tanto podemos inscribir el cuadrilátero en una circunferencia de centro O:



Por el teorema del ángulo inscrito en una circunferencia sabemos que $\angle DOB = 2\angle DAB = 2\alpha$, luego $\angle DOE = \angle DOB / 2 = \alpha$.

Por lo tanto, por definición:

$$\sin(\alpha) = \frac{ED}{OD} = \frac{ED}{OC} = \frac{ED \cdot 2}{OC \cdot 2} = \frac{EB}{AC}$$

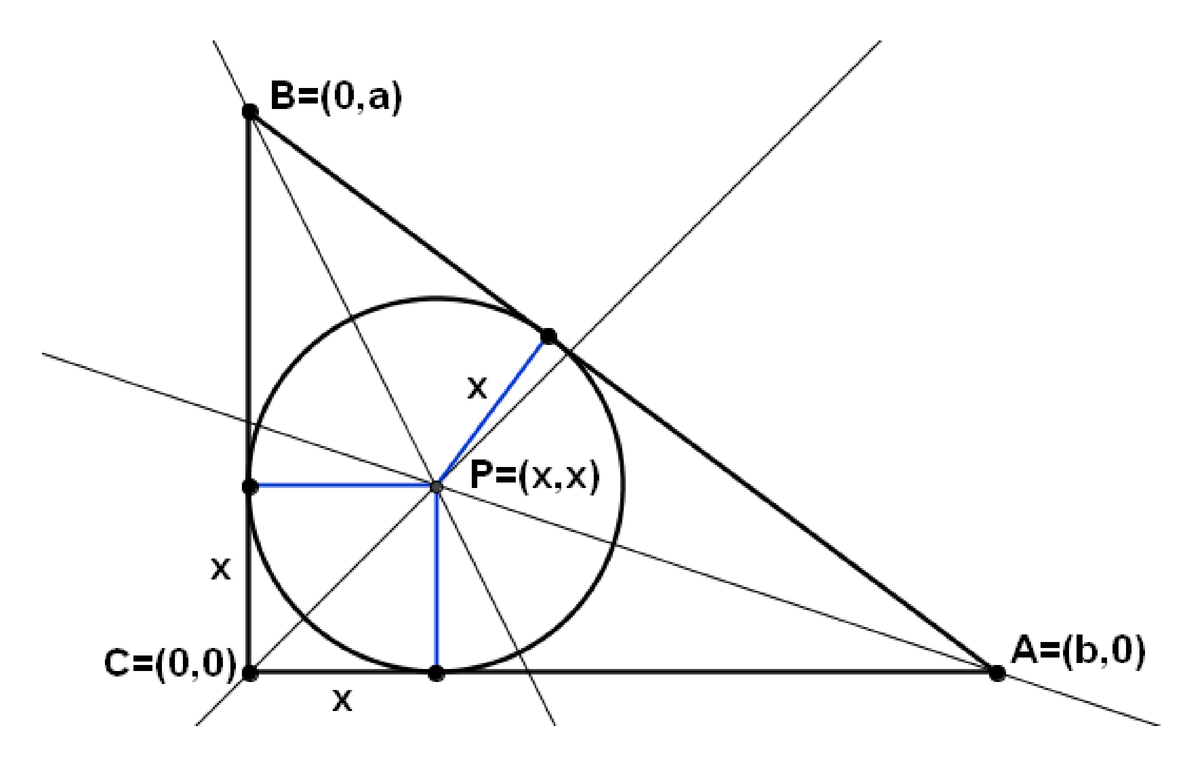
Nota: Una solución alternativa se puede encontrar en:
https://plus.google.com/+JeanDAVID/posts/Lcs8QAFzYrQ

77.

Primera parte: Circunferencia inscrita:

El centro de la circunferencia inscrita es el punto de corte de las bisectrices del triángulo, y tiene la propiedad de que equidista de los tres lados. Encontraremos su radio mediante geometría cartesiana (y después veremos una alternativa mucho más rápida y elegante):

El incentro P estará sobre la bisectriz que pasa por C=(0,0), con un ángulo de 90º/2=45º, luego cumple la ecuación $x = y$ (es la bisectriz del primer cuadrante)



La hipotenusa del triángulo tiene por ecuación $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, por lo tanto, la fórmula de la distancia de un punto (x, y) a esta recta será

$$d(x,y)=\frac{\left|\frac{x}{b}+\frac{y}{a}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

Luego buscamos un punto que cumpla la condición

$$x=y=\frac{\left|\frac{x}{b}+\frac{y}{a}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

Es decir, tenemos que resolver la ecuación

$$x=\frac{\left|\frac{x}{b}+\frac{x}{a}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\frac{x}{b}+\frac{x}{a}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} & (1)\\[2ex] x=-\dfrac{\frac{x}{b}+\frac{x}{a}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} & (2)\end{cases}$$

(1) $$x=\frac{\frac{x}{b}+\frac{x}{a}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{ab\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{a}-1\right)}{ab\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{ax+by-ab}{\sqrt{a^2b^2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=$$

$$=\frac{ax+by-ab}{\sqrt{a^2b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}=\frac{ax+by-ab}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

$$x=\frac{ax+bx-ab}{\sqrt{b^2+a^2}}\Leftrightarrow x\sqrt{b^2+a^2}=ax+bx-ab\Leftrightarrow$$

$$x\sqrt{b^2+a^2}-ax-bx+ab=0\Leftrightarrow x\left(\sqrt{b^2+a^2}-a-b\right)+ab=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{ab}{a+b-\sqrt{b^2+a^2}}$$

Racionalizando el denominador:

$$x=\frac{ab}{a+b-\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{ab}{a+b-\sqrt{b^2+a^2}}\frac{a+b+\sqrt{b^2+a^2}}{a+b+\sqrt{b^2+a^2}}=$$

$$=\frac{ab\left(a+b+\sqrt{b^2+a^2}\right)}{(a+b)^2-\left(\sqrt{b^2+a^2}\right)^2}=\frac{ab\left(a+b+\sqrt{b^2+a^2}\right)}{a^2+b^2+2ab-b^2+a^2}=\frac{a+b+\sqrt{b^2+a^2}}{2}$$

Definiendo $c:=\sqrt{a^2+b^2}$, el primer valor de la longitud del radio de la circunferencia inscrita es $\frac{a+b+c}{2}$, y por lo tanto su diametro será $a+b+c$. Ahora bien, este valor no es aceptable, pues $a+b+c>a$ y $a+b+c>b$, y por lo tanto no podría caber en el interior del triángulo. La solución aceptable tendrá que ser la segunda posibilidad:

$$(2)\quad x=-\frac{\frac{x}{b}+\frac{x}{a}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{-ab\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{a}-1\right)}{ab\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{-ax-by+ab}{\sqrt{a^2b^2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=$$

$$=\frac{-ax-by+ab}{\sqrt{a^2b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}=\frac{-ax-by+ab}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

$$x=\frac{-ax-bx+ab}{\sqrt{b^2+a^2}}\Leftrightarrow x\sqrt{b^2+a^2}=-ax-bx+ab\Leftrightarrow$$

$$x\sqrt{b^2+a^2}+ax+bx-ab=0\Leftrightarrow x\left(\sqrt{b^2+a^2}+a+b\right)-ab=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{ab}{a+b+\sqrt{b^2+a^2}}$$

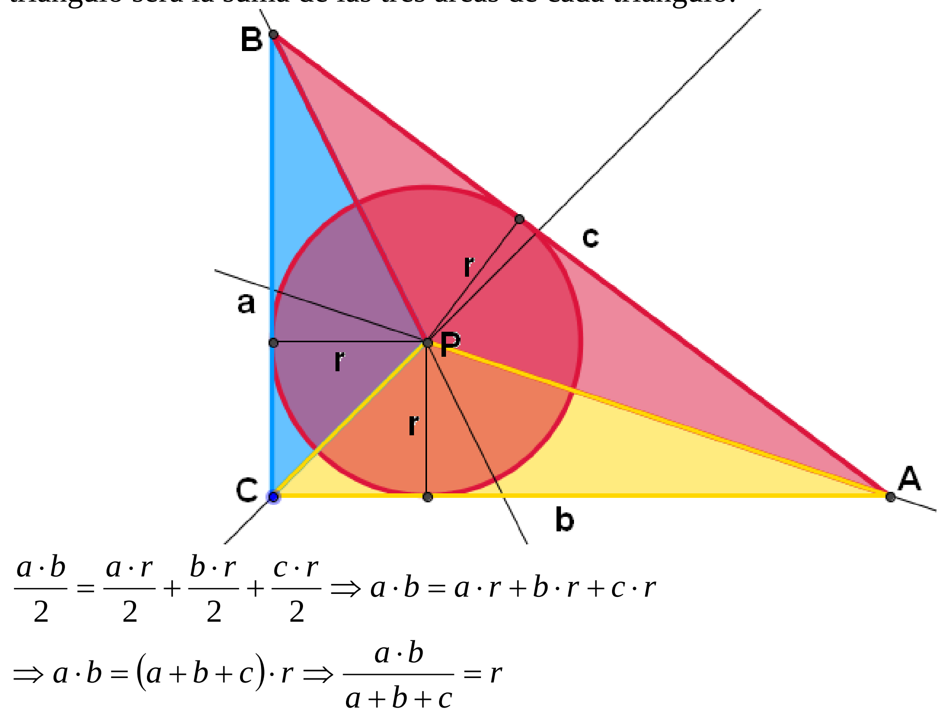
Racionalizando el denominador:

$$x=\frac{ab}{a+b+\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{ab}{a+b+\sqrt{b^2+a^2}}\,\frac{a+b-\sqrt{b^2+a^2}}{a+b-\sqrt{b^2+a^2}}=$$

$$=\frac{ab\left(a+b-\sqrt{b^2+a^2}\right)}{(a+b)^2-\left(\sqrt{b^2+a^2}\right)^2}=\frac{ab\left(a+b-\sqrt{b^2+a^2}\right)}{a^2+b^2+2ab-b^2-a^2}=\frac{a+b-\sqrt{b^2+a^2}}{2}=\frac{a+b-c}{2}$$

Así pues, el valor del diametro de la circunferencia inscrita es: $a+b-c$

Una alternativa, mucho más elegante y rápida, para encontrar el radio de la circunferencia inscrita es mediante áreas. Observamos que las tres bisectrices dividen el triángulo en tres triángulos internos, los tres con altura r, por lo tanto el área total del triángulo será la suma de las tres áreas de cada triángulo:



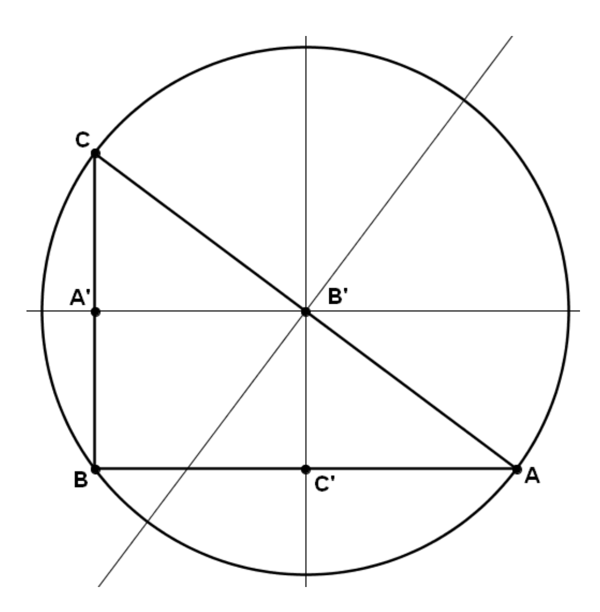
$$\frac{a\cdot b}{2}=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}\Rightarrow a\cdot b=a\cdot r+b\cdot r+c\cdot r$$

$$\Rightarrow a\cdot b=(a+b+c)\cdot r\Rightarrow\frac{a\cdot b}{a+b+c}=r$$

Y ahora sólo hay que racionalizar el denominador teniendo en cuenta que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Segunda parte: Circunferencia circunscrita:

El centro de la circunferencia circunscrita es el punto de intersección de las mediatrices, las rectas que son perpendiculares a los lados y pasan por sus puntos medios A', B' y C'.



Ahora bien, por semejanza de triángulos, los puntos medios de los catetos se cortarán en el punto medio de la hipotenusa, por lo que su diametro será c.

Así pues la suma de los dos diametros será $a+b-c+c=a+b$, es decir, la suma de los diametros es la suma de los catetos.